

上海市徐汇区 2018 届高三二模数学试卷

2018.04

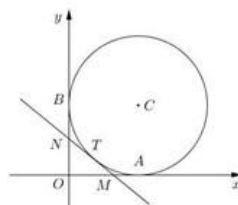
一. 填空题 (本大题共 12 题, 1-6 每题 4 分, 7-12 每题 5 分, 共 54 分)

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$, 则 $C_U A =$ _____
2. 在 $(x + \frac{1}{x})^6$ 的二项展开式中, 常数项是 _____ (结果用数值表示)
3. 函数 $f(x) = \lg(3^x - 2^x)$ 的定义域为 _____
4. 已知抛物线 $x^2 = ay$ 的准线方程是 $y = -\frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____
5. 若一个球的体积为 $\frac{32}{3}\pi$, 则该球的表面积为 _____
6. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x - y$ 的最小值为 _____
7. 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} (\sin x + \cos x)^2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的最小正周期是 _____
8. 若一圆锥的底面半径为 3, 体积是 12π , 则该圆锥的侧面积等于 _____
9. 将两颗质地均匀的骰子抛掷一次, 记第一颗骰子出现的点数是 m , 记第二颗骰子出现的点数是 n , 向量 $\vec{a} = (m-2, 2-n)$, 向量 $\vec{b} = (1, 1)$, 则向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的概率是 _____
10. 已知直线 $l_1: mx - y = 0$, $l_2: x + my - m - 2 = 0$, 当 m 在实数范围内变化时, l_1 与 l_2 的交点 P 恒在一个定圆上, 则定圆方程是 _____
11. 若函数 $f(x) = \frac{2(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值和最小值分别为 M, m , 则函数 $g(x) = (M+m)x + \sin[(M+m)x - 1]$ 图像的一个对称中心是 _____
12. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = \frac{8}{\sqrt{15}}, |\vec{b}| = \frac{4}{\sqrt{15}}$, 若对任意的 $(x, y) \in \{(x, y) \mid x\vec{a} + y\vec{b} = 1, xy > 0\}$, 都有 $|x + y| \leq 1$ 成立, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最小值为 _____

二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

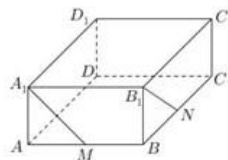
13. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overline{AB} = \overline{DC}$, 且 $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$, 则四边形 $ABCD$ 是 ()
A. 菱形 B. 矩形 C. 直角梯形 D. 等腰梯形
14. 若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$, ($n \in \mathbf{N}^+$), 则复数 $z = \frac{1}{a+i}$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
15. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A + \sin A = \cos B + \sin B$ ”是“ $\angle C = 90^\circ$ ”的()条件
A. 充分非必要 B. 必要非充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要
16. 如图, 圆 C 分别与 x 轴正半轴、 y 轴正半轴相切于点 A 、 B , 过劣弧 AB 上一点 T 作圆 C 的切线, 分别交 x 轴正半轴、 y 轴正半轴于点 M 、 N , 若点 $Q(2,1)$ 是切线上一点, 则 $\triangle MON$ 周长的最小值为()
A. 10 B. 8
C. $4\sqrt{5}$ D. 12

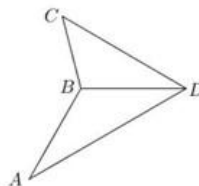


三. 解答题(本大题共5题, 共14+14+14+16+18=76分)

17. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $AD=4$, $AC_1=\sqrt{21}$, 点 M 为 AB 的中点, 点 N 为 BC 的中点.
(1) 求长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积;
(2) 求异面直线 A_1M 与 B_1N 所成角的大小.
(用反三角函数值表示).



18. 如图, 某快递小哥从 A 地出发, 沿小路 $AB \rightarrow BC$ 以平均时速20公里/小时, 送快件到 C 处, 已知 $BD=10$ 公里, $\angle DCB=45^\circ$, $\angle CDB=30^\circ$, $\triangle ABD$ 是等腰三角形, $\angle ABD=120^\circ$.
(1) 试问, 快递小哥能否在50分钟内将快件送到 C 处?
(2) 快递小哥出发15分钟后, 快递公司发现快件有重大问题, 由于通讯不畅, 公司只能派车沿大路 $AD \rightarrow DC$ 追赶, 若汽车平均时速60公里/小时, 问, 汽车能否先到达 C 处?



19. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3tx + 1$, 其定义域为 $[0, 3] \cup [12, 15]$.

(1) 当 $t = 2$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的反函数;

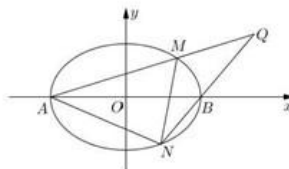
(2) 如果函数 $y = f(x)$ 在其定义域内有反函数, 求实数 t 的取值范围.

20. 如图, A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 长轴的两个端点, M, N 是椭圆上与 A, B 均不重合的相异两点, 设直线 AM, BN, AN 的斜率分别是 k_1, k_2, k_3 .

(1) 求 $k_2 \cdot k_3$ 的值;

(2) 若直线 MN 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, 求证: $k_1 \cdot k_3 = -\frac{1}{6}$;

(3) 设直线 MN 与 x 轴的交点为 $(t, 0)$ (t 为常数且 $t \neq 0$), 试探究直线 AM 与直线 BN 的交点 Q 是否落在某条定直线上? 若是, 请求出该定直线的方程; 若不是, 请说明理由.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 A_n 满足 $\frac{A_{n+1}}{n+1} - \frac{A_n}{n} = \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1 = 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $b_3 = 2$, 其前 9 项和为 36.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 n 为奇数时, 将 a_n 放在 b_n 的前面一项的位置上, 当 n 为偶数时, 将 b_n 放在 a_n 前面一项的位置上, 可以得到一个新的数列: $a_1, b_1, b_2, a_2, a_3, b_3, b_4, a_4, a_5, b_5, \dots$, 求该数列的前 n 项和 S_n ;

(3) 设 $c_n = \frac{1}{a_n + b_n}$, 对于任意给定的正整数 k ($k \geq 2$), 是否存在正整数 l, m ($k < l < m$),

使得 c_k, c_l, c_m 成等差数列? 若存在, 求出 l, m (用 k 表示); 若不存在, 请说明理由.

上海市徐汇区 2018 届高三二模数学试卷

2018.04

一. 填空题 (本大题共 12 题, 1-6 每题 4 分, 7-12 每题 5 分, 共 54 分)

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, 则 $C_U A =$ _____

【解析】 $[-1, 3]$

2. 在 $(x + \frac{1}{x})^6$ 的二项展开式中, 常数项是 _____ (结果用数值表示)

【解析】 $C_6^3 = 20$

3. 函数 $f(x) = \lg(3^x - 2^x)$ 的定义域为 _____

【解析】 $3^x > 2^x \Rightarrow x \in (0, +\infty)$

4. 已知抛物线 $x^2 = ay$ 的准线方程是 $y = -\frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____

【解析】 $a = 1$

5. 若一个球的体积为 $\frac{32}{3}\pi$, 则该球的表面积为 _____

【解析】 $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi \Rightarrow r = 2, 4\pi r^2 = 16\pi$

6. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x - y$ 的最小值为 _____

【解析】 三个交点为 $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$, $\therefore$ 最小值为 $0 - 1 = -1$

7. 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} (\sin x + \cos x)^2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的最小正周期是 _____

【解析】 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 1 = \sin 2x + 2, T = \pi$

8. 若一圆锥的底面半径为 3, 体积是 12π , 则该圆锥的侧面积等于 _____

【解析】 $\frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot h = 12\pi \Rightarrow h = 4, S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \cdot 6\pi \cdot 5 = 15\pi$

9. 将两颗质地均匀的骰子抛掷一次, 记第一颗骰子出现的点数是 m , 记第二颗骰子出现的点数是 n , 向量 $\vec{a} = (m - 2, 2 - n)$, 向量 $\vec{b} = (1, 1)$, 则向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的概率是 _____

【解析】 $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow m - n = 0, P = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$

10. 已知直线 $l_1: mx - y = 0, l_2: x + my - m - 2 = 0$, 当 m 在实数范围内变化时, l_1 与 l_2 的

交点 P 恒在一个定圆上, 则定圆方程是_____

【解析】 $x = \frac{m+2}{m^2+1}$, $m = \frac{y}{x}$, 代入消 m , 得 $x^2 - 2x + y^2 - y = 0$

11. 若函数 $f(x) = \frac{2(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值和最小值分别为 M 、 m , 则函数

$g(x) = (M+m)x + \sin[(M+m)x-1]$ 图像的一个对称中心是_____

【解析】 $f(x) = 2 + \frac{\sin x}{x^2 + 1}$, $M+m=4$, $g(x) = 4x + \sin(4x-1) = (4x-1) + \sin(4x-1) + 1$,

对称中心为 $(\frac{1}{4}, 1)$

12. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = \frac{8}{\sqrt{15}}$ 、 $|\vec{b}| = \frac{4}{\sqrt{15}}$, 若对任意的

$(x, y) \in \{(x, y) \mid x\vec{a} + y\vec{b} = 1, xy > 0\}$, 都有 $|x+y| \leq 1$ 成立, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最小值为_____

【解析】 $\frac{8}{15}$

二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 且 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则四边形 $ABCD$ 是 ()

- A. 菱形 B. 矩形 C. 直角梯形 D. 等腰梯形

【解析】 对角线垂直的平行四边形, 选 A

14. 若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$, ($n \in \mathbf{N}^+$),

则复数 $z = \frac{1}{a+i}$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【解析】 $a=2$, $z = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$, 选 D

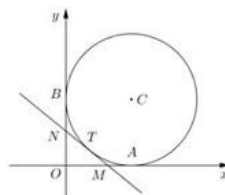
15. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A + \sin A = \cos B + \sin B$ ” 是 “ $\angle C = 90^\circ$ ” 的 () 条件

- A. 充分非必要 B. 必要非充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

【解析】 “ $\cos A + \sin A = \cos B + \sin B$ ” 还包含了 “ $A=B$ ” 的情况, 选 B

16. 如图, 圆 C 分别与 x 轴正半轴、 y 轴正半轴相切于点 A 、 B , 过劣弧 AB 上一点 T 作圆 C 的切线, 分别交 x 轴正半轴、 y 轴正半轴于点 M 、 N , 若点 $Q(2,1)$ 是切线上一点, 则 $\triangle MON$ 周长的最小值为 ()

- A. 10 B. 8
C. $4\sqrt{5}$ D. 12

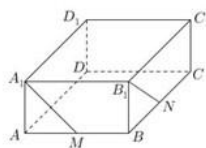


【解析】圆经过 $Q(2,1)$ 时，周长最小值为10，选A

三. 解答题 (本大题共5题，共14+14+14+16+18=76分)

17. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $AD=4$ ， $AC_1=\sqrt{21}$ ，点 M 为 AB 的中点，点 N 为 BC 的中点.

- (1) 求长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积；
- (2) 求异面直线 A_1M 与 B_1N 所成角的大小.
(用反三角函数值表示).



【解析】(1) $1 \times 2 \times 4 = 8$; (2) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$.

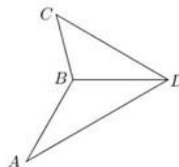
18. 如图，某快递小哥从A地出发，沿小路 $AB \rightarrow BC$ 以平均时速20公里/小时，送快件到C处，已知 $BD=10$ 公里， $\angle DCB=45^\circ$ ， $\angle CDB=30^\circ$ ， $\triangle ABD$ 是等腰三角形， $\angle ABD=120^\circ$.

- (1) 试问，快递小哥能否在50分钟内将快件送到C处？
- (2) 快递小哥出发15分钟后，快递公司发现快件有重大问题，由于通讯不畅，公司只能派车沿大路 $AD \rightarrow DC$ 追赶，若汽车平均时速60公里/小时，问，汽车能否先到达C处？

【解析】(1) $AB+BC=10+5\sqrt{2}$ ， $t=\frac{10+5\sqrt{2}}{20} > \frac{5}{6}$ ，不能

$$(2) \frac{CD}{\sin 105^\circ} = \frac{10}{\sin 45^\circ} \Rightarrow CD = 5+5\sqrt{3},$$

$$AD+CD = 5+15\sqrt{3}, t = \frac{5+15\sqrt{3}}{60} + \frac{1}{4} < \frac{10+5\sqrt{2}}{20}, \text{能}$$



19. 已知函数 $f(x)=x^2-3tx+1$ ，其定义域为 $[0,3] \cup [12,15]$.

- (1) 当 $t=2$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的反函数；
- (2) 如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域内有反函数，求实数 t 的取值范围.

【解析】(1) $f(x)=(x-3)^2-8$ ， $f(x) \in [-8,1] \cup [73,136]$ ，

$$\therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} 3-\sqrt{x+8}, & x \in [-8,1] \\ 3+\sqrt{x+8}, & x \in [73,136] \end{cases};$$

(2) 根据题意转化条件，① $f(12) > f(0) \Rightarrow t < 4$ ；② $f(15) < f(3) \Rightarrow t > 6$ ；

$$\therefore t \in (-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$$

20. 如图, A 、 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 长轴的两个端点, M 、 N 是椭圆上与 A 、 B 均不重合的相异两点, 设直线 AM 、 BN 、 AN 的斜率分别是 k_1 、 k_2 、 k_3 .

(1) 求 $k_2 \cdot k_3$ 的值;

(2) 若直线 MN 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, 求证: $k_1 \cdot k_3 = -\frac{1}{6}$;

(3) 设直线 MN 与 x 轴的交点为 $(t, 0)$ (t 为常数且 $t \neq 0$), 试探究直线 AM 与直线 BN 的交点 Q 是否落在某条定直线上? 若是, 请求出该定直线的方程; 若不是, 请说明理由.

【解析】(1) $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

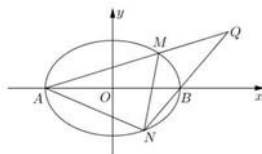
$$k_2 \cdot k_3 = \frac{y_2}{x_2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{y_2}{x_2 + \sqrt{2}} = \frac{y_2^2}{x_2^2 - 2} = -\frac{1}{2}$$

(2) 设 $l_{MN}: x = my + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 联立椭圆 $x^2 + 2y^2 = 2$,

$$(m^2 + 2)y^2 + \sqrt{2}my - \frac{3}{2} = 0, \quad y_1 + y_2 = \frac{-\sqrt{2}m}{m^2 + 2}, \quad y_1 y_2 = \frac{-3}{2(m^2 + 2)}$$

$$k_1 \cdot k_3 = \frac{y_1 y_2}{(my_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2})(my_2 + \frac{3\sqrt{2}}{2})} = \frac{\frac{-3}{2(m^2 + 2)}}{\frac{-3m^2}{2(m^2 + 2)} + \frac{3\sqrt{2}m}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}m}{m^2 + 2} + \frac{9}{2}} = -\frac{1}{6}$$

(3) $x = \frac{2}{t}$



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 A_n 满足 $\frac{A_{n+1}}{n+1} - \frac{A_n}{n} = \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1 = 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $b_3 = 2$, 其前 9 项和为 36.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 n 为奇数时, 将 a_n 放在 b_n 的前面一项的位置上, 当 n 为偶数时, 将 b_n 放在 a_n 前面一项的位置上, 可以得到一个新的数列: $a_1, b_1, b_2, a_2, a_3, b_3, b_4, a_4, a_5, b_5, \dots$, 求该数列的前 n 项和 S_n ;

(3) 设 $c_n = \frac{1}{a_n + b_n}$, 对于任意给定的正整数 k ($k \geq 2$), 是否存在正整数 l, m ($k < l < m$), 使得 c_k, c_l, c_m 成等差数列? 若存在, 求出 l, m (用 k 表示); 若不存在, 请说明理由.

【解析】(1) $\frac{A_n}{n} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow a_n = n$, $\{b_n\}$ 为等差数列, $b_3 = 4$, $b_3 = 2$, $\therefore b_n = n-1$;

(2) 当 $n = 4k-3$, $S_n = \frac{n^2+3}{4}$; 当 n 为偶数, $S_n = \frac{n^2}{4}$; 当 $n = 4k-1$, $S_n = \frac{n^2-1}{4}$;

$$(3) \ c_n = \frac{1}{2n-1}, \quad \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2m-1} = \frac{2}{2l-1}, \text{ 分离出 } m, \quad 2m-1 = \frac{(2k-1)(2l-1)}{4k-2l-1},$$

当 $l = 2k - 1$, 则 $m = 4k^2 - 7k + 3$, $k \geq 2$, 所以存在.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注