

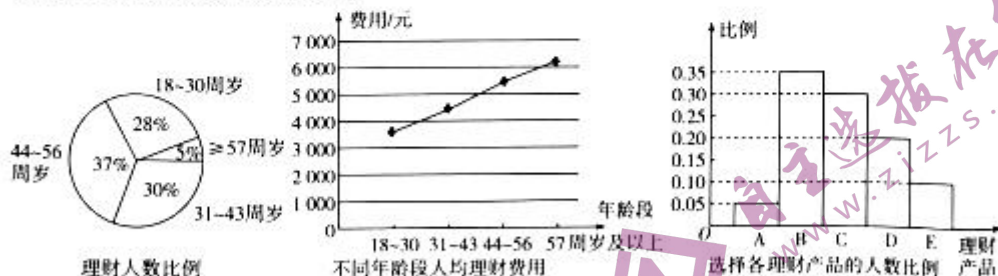
## 2022—2023 学年高三考前模拟考试 文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集  $U = \{x \mid 1 < x < 6, x \in \mathbf{N}\}$ ，集合  $M = \{2, 3\}$ ，则  $\complement_U M =$   
A.  $\{5\}$       B.  $\{4, 5\}$       C.  $\{3, 4, 5\}$       D.  $\{2, 3, 4, 5\}$
2. 复数  $z = -3i(4 - i)$  在复平面内对应的点位于  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, -4)$ ， $\mathbf{b} = (-5, 3)$ ，若向量  $t\mathbf{a} + \mathbf{b}$  与  $\mathbf{b}$  垂直，则实数  $t =$   
A. 2      B. 1      C. -1      D. -2
4. 某银行为客户定制了 A, B, C, D, E 共 5 个理财产品，并对 5 个理财产品的持有客户进行抽样调查，得出如下的统计图：



- 用该样本估计总体，以下四个说法错误的是
- A. 44~56 周岁人群理财人数最多
  - B. 18~30 周岁人群理财总费用最少
  - C. B 理财产品更受理财人青睐
  - D. 年龄越大的年龄段的人均理财费用越高
5. 大衍数列 0, 2, 4, 8, 12, 18, ... 来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理。数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾

经经历过的两仪数量总和. 其通项公式为  $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n^2}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$  记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和

为  $S_n$ , 则  $S_{100} =$

参考公式:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

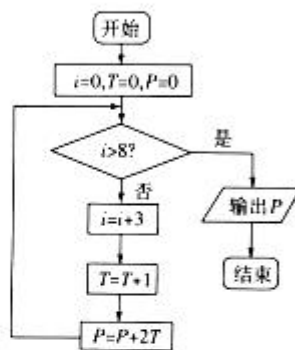
- A. 169 125                      B. 169 150                      C. 338 300                      D. 338 325

6. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ ,  $P$  是双曲线  $C$  上的一点, 且  $|PF_1| = 5, |PF_2| = 3, \angle F_1PF_2 = 120^\circ$ , 则双曲线  $C$  的离心率是

- A.  $\frac{7}{5}$                                       B.  $\frac{7}{4}$   
C.  $\frac{7}{3}$                                       D.  $\frac{7}{2}$

7. 执行如图所示的程序框图, 输出的  $P$  为

- A. 6                                      B. 10  
C. 12                                      D. 18



8. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $2a_{10} = a_{14}$ , 则  $\frac{S_{12}}{S_{16}} =$

- A. 17                                      B. 18  
C. 5                                      D. 6

9. 已知两条不同的直线  $l, m$ , 两个不同的平面  $\alpha, \beta$ , 则下列命题正确的是

- A. 若  $\alpha \perp \beta, l \perp \alpha, m \perp \beta$ , 则  $l \parallel m$                       B. 若  $\alpha \parallel \beta, l \parallel \alpha, m \parallel \beta$ , 则  $l \parallel m$   
C. 若  $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha, l \perp \beta$ , 则  $l \parallel m$                       D. 若  $\alpha \perp \beta, l \perp \alpha, m \parallel \beta$ , 则  $l \perp m$

10. 设  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点, 点  $M$  在  $C$  上, 点  $N$  在准线  $l$  上, 且  $MN$  平行于  $x$  轴, 准线  $l$  与  $x$  轴的交点为  $E$ , 若  $|NF| = 2|EF|$ , 则梯形  $EFMN$  的面积为

- A. 12                                      B. 6                                      C.  $12\sqrt{3}$                                       D.  $6\sqrt{3}$

11. 若不等式  $4\sin^2 x + (4-2a)\sin x + 5-a \geq 0$  在  $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  时恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是

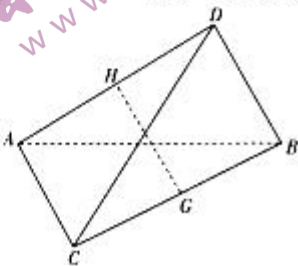
- A.  $(-\infty, 4]$                       B.  $[-4, 4]$                       C.  $(-\infty, 2]$                       D.  $(-\infty, \sqrt{3}]$

12. 已知三棱锥  $D-ABC$  的所有顶点都在球  $O$  的表面上,

$\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ, AC = BD = \frac{1}{2}AB$ , 若球  $O$  的体积为

$\frac{32\pi}{3}$ , 三棱锥  $D-ABC$  的体积为 2,  $G, H$  分别是  $BC, AD$  的中点, 则异面直线  $GH$  与  $AC$  所成角的余弦值为

- A.  $\frac{\sqrt{10}}{6}$                                       B.  $\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$                                       D.  $\frac{3}{4}$



二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 从1~9这9个数中随机选一个数,则该数的倒数大于 $\frac{1}{5}$ 的概率为\_\_\_\_\_.
14. 已知直线 $l$ 与圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = 2$ 相切,且切点的横、纵坐标均为整数,则直线 $l$ 的方程为\_\_\_\_\_. (写出一个满足条件的方程即可)
15. 已知偶函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ )的图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ,则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为\_\_\_\_\_.
16. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 4x$ ,若对于任意 $3 < x_1 < x_2 < 6$ ,都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} > 2$ ,则实数 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (12分)

为了有针对性地提高学生对于音乐课程的积极性,某校需要了解学生爱好音乐是否与性别有关,随机抽取100名该校学生进行问卷调查,得到如下列联表.

	爱好音乐	不爱好音乐	总计
男	16		
女		26	
总计			100

已知从这100名学生中任选1人,爱好音乐的学生被选中的概率为 $\frac{2}{5}$ .

(I)完成上面的列联表;

(II)根据列联表中的数据,判断能否有90%的把握认为该校学生爱好音乐与性别有关.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,其中 $n = a+b+c+d$ .

$P(K^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.001
$k_0$	2.706	3.841	6.635	10.828

18. (12分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ ,已知 $(4a-3c)\cos B = 3b\cos C$ ,且 $a, b, c$ 依次成等比数列.

(I)求 $\cos B$ ;

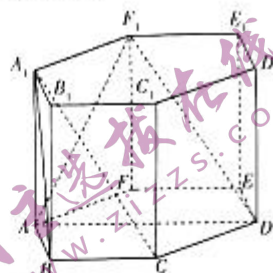
(II)若 $b=4$ ,求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. (12分)

如图所示,正六棱柱  $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  的底面边长为 1,高为  $\sqrt{3}$ .

(I) 证明:平面  $ADF_1 \parallel$  平面  $A_1BC$ ;

(II) 求平面  $ADF_1$  与平面  $A_1BC$  间的距离.



20. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}mx^2 + (m-1)x - \ln x (m \in \mathbf{R})$ ,  $g(x) = x^2 - \frac{1}{2e^x} + 1$ .

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(II) 当  $m > 0$  时,若对于任意的  $x_1 \in (0, +\infty)$ ,总存在  $x_2 \in [1, +\infty)$ ,使得  $f(x_1) \geq g(x_2)$ ,求  $m$  的取值范围.

21. (12分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,左、右顶点分别为  $A_1, A_2$ ,

$F_2$  是  $OA_1 (O$  为坐标原点) 的中点,且  $|F_1F_2| + |A_2F_2| = 2$ .

(I) 求  $E$  的方程;

(II) 不过坐标原点的直线  $l$  与椭圆  $E$  相交于  $A, B$  两点 ( $A, B$  异于椭圆  $E$  的顶点),直线  $AA_1, BA_2$  与  $y$  轴的交点分别为  $M, N$ ,若  $\overrightarrow{A_2N} - \overrightarrow{A_2O} = 3\overrightarrow{A_2O} - 3\overrightarrow{A_2M}$ ,证明:直线  $l$  过定点,并求该定点的坐标.

(二) 选考题:共 10 分.请考生在第 22,23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系  $xOy$  中,曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$ ,以坐标原点为极

点, $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$ .

(I) 求曲线  $C$  的普通方程和直线  $l$  的直角坐标方程;

(II) 求  $C$  上的动点到直线  $l$  距离的取值范围.

23. [选修 4-5:不等式选讲] (10分)

已知函数  $f(x) = |3x+a| + |3|x-2|| (a \in \mathbf{R})$ .

(I) 当  $a=0$  时,求不等式  $f(x) \geq 10$  的解集;

(II) 若  $f(x) > 5$  恒成立,求  $a$  的取值范围.

天一大联考  
2022—2023 学年高三考前模拟考试

文科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 因为  $U = \{x | 1 < x < 6, x \in \mathbf{N}\} = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $M = \{2, 3\}$ , 所以  $\complement_U M = \{4, 5\}$ .

2. 答案 C

命题意图 本题考查复数的几何意义.

解析 因为  $z = -3i(4-i) = -12i + 3i^2 = -3 - 12i$ , 可知复数  $z$  在复平面内对应的点为  $(-3, -12)$ , 所以  $z$  在复平面内对应的点位于第三象限.

3. 答案 A

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析  $ta + b = t(1, -4) + (-5, 3) = (t-5, -4t+3)$ , 若向量  $ta + b$  与  $b$  垂直, 则  $(ta + b) \cdot b = (t-5, -4t+3) \cdot (-5, 3) = -5(t-5) + 3(-4t+3) = -17t + 34 = 0$ , 解得  $t = 2$ .

4. 答案 B

命题意图 本题考查统计图表的应用.

解析 A 选项, 44~56 周岁人群理财人数所占比例是 37%, 是最多的, 故 A 正确; B 选项, “18~30 周岁人群的人均理财费用”比“57 周岁及以上人群的人均理财费用”的一半还多, 而 18~30 周岁人群理财人数所占比例是 57 周岁及以上人群理财人数所占比例的 5.6 倍, 所以 57 周岁及以上人群理财总费用最少, 故 B 错误; C 选项, B 理财产品占的比例为 0.35, 是最多的, 故 C 正确; D 选项, 随着年龄的增长, 人均理财费用逐渐增高, 所以年龄越大的年龄段的人均理财费用越高, 故 D 正确.

5. 答案 B

命题意图 本题考查数列的求和.

解析  $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n^2}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$  故  $S_{100} = \frac{1^2-1}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2-1}{2} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^2-1}{2} + \frac{6^2}{2} + \cdots + \frac{99^2-1}{2} + \frac{100^2}{2} =$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+99^2+100^2}{2} - \frac{50}{2} = \frac{100 \times 101 \times 201}{6 \times 2} - 25 = 169150.$$

6. 答案 D

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 设双曲线  $C$  的半焦距为  $c (c > 0)$ . 由题意, 点  $P$  在双曲线  $C$  的右支上,  $|PF_1| = 5$ ,  $|PF_2| = 3$ . 由余弦定理

得  $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{5^2+3^2-|F_1F_2|^2}{2 \times 5 \times 3} = -\frac{1}{2}$ , 解得  $|F_1F_2| = 7$ , 即  $2c = 7$ ,  $c = \frac{7}{2}$ . 根据双曲线定义得  $|PF_1| - |PF_2| =$

$2a = 2$ , 解得  $a = 1$ , 故双曲线  $C$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$ .

7. 答案 C

命题意图 本题考查程序框图.

解析 第一次循环,  $i=0 < 8$ , 则  $i=0+3=3, T=0+1=1, P=0+2 \times 1=2$ ;

第二次循环,  $i=3 < 8$ , 则  $i=3+3=6, T=1+1=2, P=2+2 \times 2=6$ ;

第三次循环,  $i=6 < 8$ , 则  $i=6+3=9, T=2+1=3, P=6+2 \times 3=12$ .

此时,  $i=9 > 8$ , 所以输出的  $P$  为 12.

8. 答案 A

命题意图 本题考查等比数列的性质.

解析 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ . 由  $2a_{10} = a_{14}$ , 得  $2a_{10} = a_{10}q^4$ , 解得  $q^4 = 2$ , 所以  $\frac{S_{32}}{S_{16}} = \frac{a_1(1-q^{32})}{a_1(1-q^{16})} = 1 + q^{16} =$

$1 + 2^4 = 17$ .

9. 答案 C

命题意图 本题考查空间线面位置关系的判断.

解析 对于 A, 若  $\alpha \perp \beta, l \perp \alpha, m \perp \beta$ , 则  $l \perp m$ , A 错误;

对于 B, 若  $\alpha \parallel \beta, l \perp \alpha, m \parallel \beta$ , 则  $l$  与  $m$  可能平行、异面, 也可能相交, B 错误;

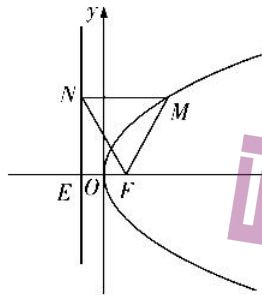
对于 C, 若  $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha$ , 则  $m \perp \beta$ , 又  $l \perp \beta$ , 所以  $l \parallel m$ , C 正确;

对于 D, 若  $\alpha \perp \beta, l \perp \alpha, m \parallel \beta$ , 则  $l$  与  $m$  可能平行, 也可能相交或异面, 相交或异面时可能垂直, 也可能不垂直, D 错误.

10. 答案 D

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 由题可知,  $p=2$ , 抛物线的焦点  $F$  为  $(1,0)$ , 准线  $l$  为  $x=-1$ , 如图所示. 由题知  $MN \perp l$ , 因为  $|NF| = 2|EF| = 2 \times 2 = 4$ , 所以  $\angle EFN = 60^\circ$ , 则  $|NE| = \sqrt{3}|EF| = 2\sqrt{3}$ . 因为  $MN \parallel EF$ , 所以  $\angle MNF = \angle EFN = 60^\circ$ . 由抛物线的定义可知  $|MN| = |MF|$ , 所以  $\triangle MNF$  是正三角形, 所以  $|MN| = 4$ , 所以  $S_{\triangle MNF} = \frac{(4+2) \times 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ .



11. 答案 A

命题意图 本题考查函数与不等式的综合.

解析 依题意知,  $4\sin^2 x + (4-2a)\sin x + 5 - a \geq 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x + 5 \geq (2\sin x + 1)a$ , 结合  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ , 知

$2\sin x + 1 > 0$ , 不等式转化为  $\frac{4\sin^2 x + 4\sin x + 5}{2\sin x + 1} \geq a$ , 须  $\left(\frac{4\sin^2 x + 4\sin x + 5}{2\sin x + 1}\right)_{\min} \geq a$ . 设  $t = \sin x$ , 由  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ,

知  $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 设  $g(t) = \frac{4t^2 + 4t + 5}{2t + 1} = 2t + 1 + \frac{4}{2t + 1} \geq 2\sqrt{(2t + 1) \times \frac{4}{2t + 1}} = 4$ , 当且仅当  $2t + 1 = \frac{4}{2t + 1}$ , 即  $t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6}$  时等号成立, 因此实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 4]$ .

12. 答案 C

**命题意图** 本题考查空间几何体的结构特征以及相关计算.

**解析** 如图,取  $AB$  的中点  $O$ ,连接  $OC,OD$ ,因为  $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$ ,所以  $O$  到  $A,B,C,D$  的距离相等,故  $O$

为三棱锥  $D-ABC$  的外接球的球心. 设外接球半径为  $R$ ,由球  $O$  的体积为  $\frac{32\pi}{3}$ ,得  $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$ ,解得  $OD=R=$

$2$ ,则  $AB=4,AC=BD=2,AD=BC=2\sqrt{3},\angle DAB = \angle ABC = 30^\circ$ . 过  $D,H$  作  $DE,HF$  分别垂直于  $AB$  于点  $E,F$ ,连接  $GF,OG,OH$ . 因为  $DE=AD\sin 30^\circ = \sqrt{3},S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ . 设三棱锥  $D-ABC$  的高为

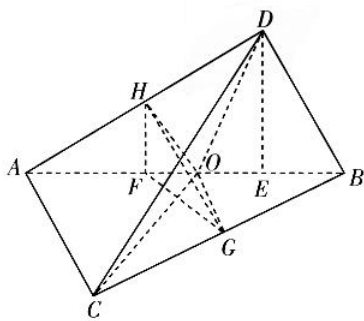
$h$ ,则体积  $V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times h = 2$ ,解得  $h = \sqrt{3}$ ,而  $DE = \sqrt{3}$ ,所以  $DE$  就是三棱锥  $D-ABC$  的高. 在

$\triangle BFG$  中, $BF = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},BG = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3},\angle FBG = 30^\circ$ ,由余弦定理得  $\cos \angle FBG = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 - GF^2}{2 \times \frac{5}{2} \times \sqrt{3}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,解得  $GF = \frac{\sqrt{7}}{2},HF = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,则由勾股定理得  $GH = \sqrt{HF^2 + GF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ . 因为  $OG$

是  $\triangle ABC$  的中位线,所以  $OG \parallel AC$  且  $OG = \frac{1}{2}AC = 1$ ,同理, $OH = 1$ ,所以  $\angle OGH$  或其补角是异面直线  $GH$  与  $AC$

所成的角,在  $\triangle OGH$  中,由余弦定理得  $\cos \angle OGH = \frac{1^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \times 1 \times \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ,即为所求.



二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 答案  $\frac{4}{9}$

**命题意图** 本题考查古典概型的概率计算.

**解析** 从  $1 \sim 9$  这 9 个数中随机选一个数共有 9 种等可能的结果,其中倒数大于  $\frac{1}{5}$  的有  $1,2,3,4$  等 4 种等可能的结果,所以该数的倒数大于  $\frac{1}{5}$  的概率为  $\frac{4}{9}$ .

14. 答案  $x - y - 1 = 0$  或  $x + y + 1 = 0$  或  $x - y + 3 = 0$  或  $x + y - 3 = 0$  (任写一个都对)

**命题意图** 本题考查直线与圆的位置关系.

**解析** 圆  $C$  的圆心为点  $(0,1)$ ,圆  $C$  经过的整点有 4 个:  $(1,0),(-1,0),(1,2),(-1,2)$ . 以点  $(1,0)$  为例,圆心与切点连线的斜率为  $-1$ ,则切线斜率为  $1$ ,所以切线方程为  $y = x - 1$ .

15. 答案  $[-2,1]$

**命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为函数  $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$  的图象的相邻两条对称轴间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 所以函数  $f(x)$  的最小正周期为  $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ , 则  $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ , 解得  $\omega = 2$ , 所以  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$ , 又  $f(x)$  为偶函数, 所以  $-\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 解得  $\varphi = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 因为  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ , 所以  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos 2x$ , 因为  $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ , 所以  $2x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ , 所以  $\cos 2x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ , 所以  $-2\cos 2x \in [-2, 1]$ , 故  $f(x) \in [-2, 1]$ .

16. 答案  $\left[\frac{16}{27}, +\infty\right)$

命题意图 本题综合考查函数的性质.

解析  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} > 2$  可变形为  $\frac{[f(x_1) - 2x_1^2] - [f(x_2) - 2x_2^2]}{x_1^2 - x_2^2} > 0$ . 令  $g(x) = f(x) - 2x^2 = ax^3 - 2x^2 - 4x$ , 则函数  $g(x)$  在区间  $(3, 6)$  上单调递增,  $g'(x) = 3ax^2 - 4x - 4$ , 则  $g'(x) \geq 0$  在区间  $(3, 6)$  上恒成立, 即  $3ax^2 - 4x - 4 \geq 0$  在区间  $(3, 6)$  上恒成立, 则  $a \geq \frac{4}{3x} + \frac{4}{3x^2}$  在区间  $(3, 6)$  上恒成立, 当  $x \in (3, 6)$  时,  $\frac{4}{3x} + \frac{4}{3x^2} < \frac{4}{3 \times 3} + \frac{4}{3 \times 3^2} = \frac{16}{27}$ , 所以  $a \geq \frac{16}{27}$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{16}{27}, +\infty\right)$ .

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查独立性检验的应用.

解析 (I) 设这 100 名学生中爱好音乐的学生有  $x$  人, 则  $\frac{x}{100} = \frac{2}{5}$ ,

解得  $x = 40$ . ..... (3 分)

列联表完成如下.

	爱好音乐	不爱好音乐	总计
男	16	34	50
女	24	26	50
总计	40	60	100

..... (6 分)

(II) 由 (I) 可知  $k = \frac{100 \times (16 \times 26 - 24 \times 34)^2}{60 \times 40 \times 50 \times 50} \approx 2.667$ , ..... (9 分)

因为  $2.667 < 2.706$ , 故没有 90% 的把握认为该校学生爱好音乐与性别有关. .... (12 分)

18. 命题意图 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 (I) 由条件及正弦定理得  $4\sin A \cos B - 3\sin C \cos B = 3\sin B \cos C$ , ..... (2 分)

所以  $4\sin A \cos B = 3\sin B \cos C + 3\sin C \cos B$ ,

所以  $4\sin A \cos B = 3\sin(B + C)$ , ..... (4 分)

因为  $A + B + C = \pi$ , 所以  $4\sin A \cos B = 3\sin A$ , ..... (5 分)

因为  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin A > 0$ , 所以  $\cos B = \frac{3}{4}$ . ..... (6 分)

(II) 因为  $b = 4$ , 且  $a, b, c$  依次成等比数列,

所以  $ac = b^2 = 16$ . ..... (8 分)



由余弦定理得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$ , 得  $16 = (a + c)^2 - 2ac - 2accos B$ ,  
所以  $a + c = 6\sqrt{2}$ , ..... (11分)

所以  $\triangle ABC$  的周长为  $6\sqrt{2} + 4$ . ..... (12分)

19. 命题意图 本题考查面面平行的证明以及距离的计算.

解析 (I) 在正六棱柱  $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  中,  
因为底面为正六边形, 所以  $AD \parallel BC$ , ..... (1分)

因为  $AD \not\subset$  平面  $A_1BC$ ,  $BC \subset$  平面  $A_1BC$ , 所以  $AD \parallel$  平面  $A_1BC$ . ..... (2分)

因为  $CD \parallel A_1F_1$ ,  $CD = A_1F_1$ , 所以四边形  $CDF_1A_1$  为平行四边形, ..... (3分)

所以  $DF_1 \parallel A_1C$ , 因为  $DF_1 \not\subset$  平面  $A_1BC$ ,  $A_1C \subset$  平面  $A_1BC$ , 所以  $DF_1 \parallel$  平面  $A_1BC$ , ..... (4分)

又  $AD \cap DF_1 = D$ , 所以平面  $ADF_1 \parallel$  平面  $A_1BC$ . ..... (6分)

(II) 平面  $ADF_1$  与平面  $A_1BC$  间的距离等价于点  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离, 设为  $d$ .

连接  $AC$ , 则四面体  $A_1ABC$  的体积  $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} d$ . ..... (7分)

因为  $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{2\pi}{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{4}$ , ..... (8分)

$A_1B = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = 2$ ,  $A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2} = \sqrt{6}$ ,

所以  $\cos \angle A_1BC = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times 1 \times 2} = -\frac{1}{4}$ , 从而  $\sin \angle A_1BC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , ..... (10分)

所以  $S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , ..... (11分)

所以  $d = \frac{3V}{S_{\triangle A_1BC}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ , 即平面  $ADF_1$  与平面  $A_1BC$  间的距离为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . ..... (12分)

20. 命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 (I)  $f'(x) = \frac{(mx-1)(x+1)}{x}, x > 0$ . ..... (2分)

当  $m \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$  恒成立,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减; ..... (3分)

当  $m > 0$  时, 由  $f'(x) > 0$ , 解得  $x \in (\frac{1}{m}, +\infty)$ , 即  $f(x)$  在  $(\frac{1}{m}, +\infty)$  上单调递增; ..... (4分)

由  $f'(x) < 0$ , 解得  $x \in (0, \frac{1}{m})$ , 即  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{m})$  上单调递减. ..... (5分)

(II) 当  $m > 0$  时, 由 (I) 知  $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{m}) = \ln m + 1 - \frac{1}{2m}$ , ..... (6分)

易知  $g(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $g(x)_{\min} = g(1) = 2 - \frac{1}{2e}$ , ..... (7分)

由题意知  $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$ , 即  $\ln m + 1 - \frac{1}{2m} \geq 2 - \frac{1}{2e}$ . ..... (8分)

设  $h(m) = \ln m + 1 - \frac{1}{2m}$ , 则  $h'(m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} > 0$ , 所以  $h(m)$  为增函数, ..... (10分)

又  $h(e) = 2 - \frac{1}{2e}$ , 所以  $m \geq e$ ,

即  $m$  的取值范围是  $[e, +\infty)$ . ..... (12分)

21. 命题意图 本题考查椭圆的标准方程与性质.

解析 (I) 设椭圆  $E$  的半焦距为  $c (c > 0)$ .

因为  $F_2$  是  $OA_2$  的中点, 所以  $a=2c$ , ..... (1 分)

因为  $|F_1F_2| + |A_2F_2| = 2$ , 所以  $2c \cdot (a-c) = 2$ , 得  $2c \cdot (2c-c) = 2$ , 解得  $c=1$ , ..... (2 分)

所以  $a=2, b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ , ..... (3 分)

所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... (4 分)

(II) 由已知得  $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

则直线  $AA_1$  的斜率为  $\frac{y_1}{x_1+2}$ , 直线  $AA_1$  的方程为  $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ , 得  $M$  点坐标为  $(0, \frac{2y_1}{x_1+2})$ ,

直线  $BA_2$  的斜率为  $\frac{y_2}{x_2-2}$ , 直线  $BA_2$  的方程为  $y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ , 得  $N$  点坐标为  $(0, -\frac{2y_2}{x_2-2})$ . ..... (5 分)

因为  $\vec{A_2N} - \vec{A_2O} = 3\vec{A_2M} - 3\vec{A_2O}$ , 所以  $\vec{ON} = 3\vec{MO}$ .

所以  $|ON|^2 = 9|OM|^2$ , 所以  $\frac{4y_2^2}{(x_2-2)^2} = \frac{36y_1^2}{(x_1+2)^2}$ , ..... (6 分)

又因为  $y_1^2 = 3 - \frac{3x_1^2}{4} = \frac{12-3x_1^2}{4}, y_2^2 = 3 - \frac{3x_2^2}{4} = \frac{12-3x_2^2}{4}$ ,

所以  $\frac{4-x_2^2}{(x_2-2)^2} = 9 \times \frac{4-x_1^2}{(x_1+2)^2}$ , 即  $\frac{2+x_2}{2-x_2} = \frac{9(2-x_1)}{2+x_1}$ ,

整理得  $5(x_1+x_2) - 2x_1x_2 - 8 = 0$ . (\*) ..... (7 分)

①若直线  $AB$  的斜率不存在, 则  $x_1 = x_2$ ,

由  $5(x_1+x_2) - 2x_1x_2 - 8 = 0$  得  $x_2^2 - 5x_2 + 4 = 0$ , 解得  $x_2 = 1$  或  $x_2 = 4$ ,

此时直线  $AB$  的方程为  $x=1$  或  $x=4$ , 又直线  $x=4$  与椭圆不相交, 故舍去,  $x=1$  满足条件. .... (8 分)

②若直线  $AB$  的斜率存在, 设直线  $AB$  的方程为  $y=kx+t$ ,

将直线  $AB$  的方程与椭圆方程联立  $\begin{cases} y=kx+t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$  得  $(3+4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0$ ,

其中  $\Delta = 64k^2t^2 - 4(3+4k^2)(4t^2 - 12) = 16(12k^2 - 3t^2 + 9) > 0$ ,

且  $x_1+x_2 = -\frac{8kt}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4t^2-12}{3+4k^2}$ . ..... (9 分)

代入 (\*), 得  $-5 \times \frac{8kt}{3+4k^2} - 2 \times \frac{4t^2-12}{3+4k^2} - 8 = 0$ , 得  $4k^2 + 5kt + t^2 = 0$ , 得  $(4k+t)(k+t) = 0$ ,

所以  $t = -4k$  或  $t = -k$ ,

当  $t = -4k$  时, 直线  $AB$  的方程为  $y = kx - 4k = k(x-4)$ , 恒过点  $(4, 0)$ , 作图可知, 此时点  $M$  与  $N$  在  $x$  轴的同侧, 不满足  $\vec{ON} = 3\vec{MO}$ , 故舍去;

当  $t = -k$  时, 直线  $AB$  的方程为  $y = kx - k = k(x-1)$ , 恒过点  $(1, 0)$ , 符合题意. .... (11 分)

综上所述, 直线  $AB$  恒过点  $(1, 0)$ . .... (12 分)

22. 命题意图 本题考查方程的互化、参数方程的应用.

解析 (I) 由  $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} \sin \alpha, \end{cases}$  得  $x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , 即  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ ,

所以曲线  $C$  的普通方程是  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... (2 分)

由  $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$ , 得  $\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta\right) = 2\sqrt{2}$ . .... (3 分)

得  $\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta = 2\sqrt{2}$ , 得  $\rho\sin\theta - \rho\cos\theta = 4$ , ..... (4分)

代入公式  $\begin{cases} \rho\cos\theta = x, \\ \rho\sin\theta = y, \end{cases}$  得  $y - x = 4$ ,

所以直线  $l$  的直角坐标方程为  $x - y + 4 = 0$ . ..... (5分)

(II) 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos\alpha, \\ y = \sqrt{3}\sin\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数),

设  $C$  上的动点为  $M(\cos\alpha, \sqrt{3}\sin\alpha)$ , ..... (6分)

则  $C$  上的动点  $M$  到直线  $l$  的距离为  $d = \frac{|\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|2\sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) + 4|}{\sqrt{2}}$ . ..... (8分)

因为  $2\sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) \in [-2, 2]$ , 所以  $d \in [\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ .

即  $C$  上的动点到直线  $l$  的距离的取值范围为  $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ . ..... (10分)

23. 命题意图 本题考查绝对值不等式的性质.

解析 (I) 若  $a = 0$ ,  $f(x) \geq 10$  即为  $|3x| + 3|x - 2| \geq 10$ . ..... (1分)

当  $x \geq 2$  时, 不等式  $f(x) \geq 10$  转化为  $3x + 3(x - 2) \geq 10$ , 解得  $x \geq \frac{8}{3}$ ; ..... (2分)

当  $0 < x < 2$  时, 不等式  $f(x) \geq 10$  转化为  $3x - 3(x - 2) = 6 \geq 10$ , 无解; ..... (3分)

当  $x \leq 0$  时, 不等式  $f(x) \geq 10$  转化为  $-3x - 3(x - 2) \geq 10$ , 解得  $x \leq -\frac{2}{3}$ . ..... (4分)

综上所述, 不等式  $f(x) \geq 10$  的解集为  $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{8}{3}, +\infty)$ . ..... (5分)

(II) 因为  $f(x) > 5$  恒成立, 所以  $f(x)_{\min} > 5$ . ..... (6分)

又  $|3x + a| + 3|x - 2| = |3x + a| + |3x - 6| \geq |3x + a - (3x - 6)| = |a + 6|$ , ..... (8分)

所以  $|a + 6| > 5$ , 则  $a + 6 > 5$  或  $a + 6 < -5$ , ..... (9分)

解得  $a > -1$  或  $a < -11$ .

故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -11) \cup (-1, +\infty)$ . ..... (10分)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线