三湘名校教育联盟·2023届高三第二次大联考·数学
参考答案、提示及评分细则

选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	C	C	D	D	A	C	ABD	ACD	AD	ABD

1.【答案】A

【解析】由已知有 $A=(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$，所以 $\complement_{\mathrm{R}}A=(-1,6)$.

【命题立意】本题考查集合的补集运算，考查学生的数学运算能力.

2.【答案】B

【解析】由已知有 $\frac{|a+bi|}{|2+i|}=|1-2i|$，所以 $|a+bi|=\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$.

【命题立意】本题考查复数的乘法运算，复数的模，考查学生的数学运算能力.

3.【答案】C

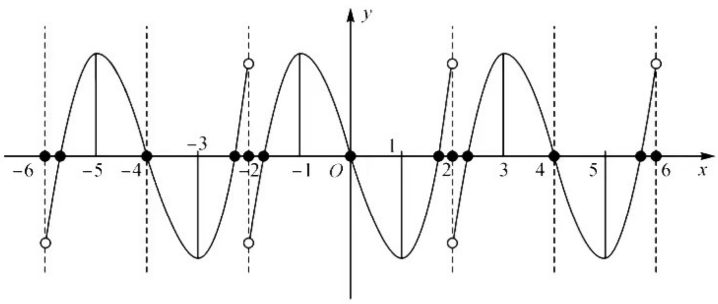
【解析】和为质数有(1,2)，(1,4)，(2,3)，(1,6)，(2,5)，(3,4)，(2,9)，(3,8)，(4,7)，(5,6)，(4,9)，(5,8)，(6,7)，(8,9)共 14 种情况，因此概率为 $\frac{14}{C_9^2}=\frac{7}{18}$. 故选 C.

【命题立意】本题考查概率的古典概型，考查学生的数学运算能力.

4.【答案】C

【解析】由已知有 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 为周期函数，周期为 4，

所以 $f(-2)=-f(2)=f(-2+4)=f(2)$，即 $f(2)=f(-2)=0$，作出 $f(x)$ 的大致图象如下：



由图象可知，$f(x)$ 在 $[-6,6]$ 上零点的个数为 13，故选 C.

【命题立意】本题考查抽象函数的性质、结合函数的图象解决函数零点的问题，考查学生的数学抽象、逻辑推理以及数学运算能力.

5.【答案】D

【解析】由图可知 $f(0)=1\Rightarrow A\sin\varphi=1$，$\because \varphi\in(0,\pi)$，$\therefore \sin\varphi>0$，由图可知 $A=2$，$\therefore \sin\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$，

由图可知 $\frac{T}{2}<4<\frac{3}{4}T$，则：$\frac{16}{3}<T<8$，$\frac{16}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<8$，$\frac{\pi}{4}<\omega<\frac{3}{8}\pi$，由图可知 $f(4)=-2$，$\sin(4\omega+\varphi)=-1$，即

$$4\omega+\varphi=\frac{3}{2}\pi+2k\pi,\begin{cases}\text{当 }\varphi=\frac{\pi}{6}\text{ 时},\omega=\frac{\pi}{3}+\frac{k}{2}\pi,\text{则 }\omega=\frac{\pi}{3},\\ \text{当 }\varphi=\frac{5}{6}\pi\text{ 时},\omega=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi,\text{则 }\omega\text{ 无解}.\end{cases}$$
则 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$. 故 A 错误；

9.【答案】ABD

【解析】由图中的数据可知该校教师政治面貌情况如下表：

	共产党	民主党	无党派	合计
中老年	72	9	63	144
中青年	108	21	27	156
合计	180	30	90	300

对于选项 A，$\frac{108}{156}>\frac{104}{156}=\frac{2}{3}$，故 A 正确；

对于选项 B，$\frac{27}{300}=9\%$，故 B 正确；

对于选项 C，$\frac{9}{144}\times16=1$，故 C 错误；

对于选项 D，因为 $\chi^2=\frac{300\times(72\times48-72\times108)^2}{180\times120\times144\times156}=\frac{150}{13}>10.828$，所以依据 $\alpha=0.001$ 的独立性检验分析，该校教师是否为共产党员与年龄有关，此推断犯错误的概率不大于 0.001，因此选项 D 正确；综上，选 ABD.

【命题立意】本题考查利用数学图表解决古典概型、分层抽样、独立性检验等相关知识，考查学生的数学抽象、逻辑推理以及数学运算能力.

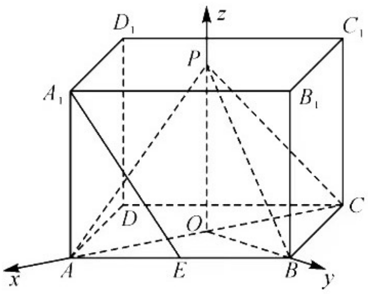
10.【答案】ACD

【解析】对于选项 A：因为底面 $ABCD$ 为正方形，P、O 分别是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上、下底面的中心，所以 $OC\perp OB$，$PO\perp OC$，所以 $OC\perp$ 平面 POB，所以 $OC\perp PB$，故选项 A 正确；

对于选项 B：设 A_1B_1，BC 的中点为 Q，R，连接 QB，PR，

因为 $QP=BR$，$QP/\!/BR$，所以 $QB/\!/PR$，又 $A_1E/\!/QB$，

所以 $A_1E/\!/PR$，所以 A_1E 与 PC 为异面直线，故 B 错误；



以点 O 为原点，直线 OA，OB，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设 $AA_1=2$，则 $A(2,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$E(1,1,0)$，$P(0,0,2)$，$B(0,2,0)$，$D(0,-2,0)$，$C(-2,0,0)$，$\overrightarrow{A_1E}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{PA}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x-2y=0,\\ 2y-2z=0,\end{cases}$

取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$，

同理可得平面 PAD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$，

对于选项 C：$\cos\langle\overrightarrow{A_1E},\overrightarrow{PA}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{A_1E}||\overrightarrow{PA}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故选项 C 正确；

对于选项 D：由于平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$，平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=-\frac{1}{3}$，

对于选项 B，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[6k-2,6k+1](k\in\mathbf{Z})$，故 B 错误；

对于选项 C，$f(x)=0$，$\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$x=3k-\frac{1}{2}$，$f(x)$ 在区间 $[-2\pi,2\pi]$ 上有 $-\frac{7}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{11}{2}$ 共计 4 个零点，故 C 错误；

对于选项 D，$g(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}x+3\cos\frac{\pi}{3}x=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 2\sqrt{3}$，故 D 正确.

【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质，考查学生的数学抽象以及数学运算能力.

6.【答案】D

【解析】首先比较 a 与 c 的大小，$a-c=3-\left(\sqrt{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$，令 $f(x)=x+\frac{2}{x}$.

易知函数 $f(x)$ 在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，又 $\sqrt{2}<\sqrt{e}<2$，

所以 $f(\sqrt{e})<f(2)$，即 $\sqrt{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}<2+\frac{2}{2}=3$，因此 $a>c$；

再比较 a 与 b 的大小，$a-b=\frac{1}{2}-\ln 2-\frac{2}{\sqrt{e}}=1+\ln\frac{2}{\sqrt{e}}-\frac{2}{\sqrt{e}}$，

令 $g(x)=1+\ln x-x$，$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

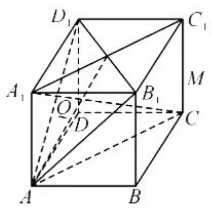
所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=0$，所以 $g(\frac{2}{\sqrt{e}})<0$，即 $a-b<0$，故 $a<b$.

综上 $c<a<b$，选 D.

【命题立意】本题考查利用函数的单调性比较大小，考查学生的逻辑推理以及数学运算能力.

7.【答案】A

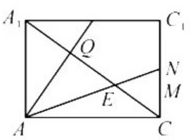


【解析】连接 A_1C，易知 $A_1C\perp$ 平面 AB_1D_1，记 A_1C 与平面 AB_1D_1 交于点 Q，易知 Q 为线段 A_1C 上靠近点 A_1 的三等分点，记另一个三等分点为 E，

则 A_1 与 E 关于平面 AB_1D_1 对称，所以 $|PA_1|=|PE|$，

因此若在 $\triangle AB_1D_1$ 内部（不含边界）存在点 P 使得 $|PM|-|PA_1|$ 有最大值，则直线 ME 与平面 AB_1D_1 的交点在 $\triangle AB_1D_1$ 内部（不含边界）. 作出四边形 ACC_1A_1 如图，其中点 N 为 CC_1 的中点，

因此当点 M 在线段 CN 上（不含端点）运动时，满足题意，因此 $|CM|\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



【命题立意】本题考查对称转换求空间点与点距离的运算，考查学生的直观想象、逻辑推理以及数学运算能力.

8.【答案】C

【解析】对于①，若 $a_5=37$，则 $a_4=18$，$a_3=9$，$a_2=4$，此时无符合条件的 a_1，即①错误；

对于②，易知 a_{2n-1} 为奇数，且 a_{2n} 为偶数，所以 $a_{2n+1}=2a_{2n}+1=4a_{2n-1}+1$，

所以 $a_{2n+1}+\frac{1}{3}=4\left(a_{2n-1}+\frac{1}{3}\right)$，又 $a_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，所以 $a_{2n-1}=\frac{4}{3}\times 4^{n-1}-\frac{1}{3}=\frac{4^n-1}{3}$，即②正确；

对于③，因为 $a_{n+1}\geqslant 2a_n$，所以 $S_n\geqslant a_1+2a_1+2^2a_1+\cdots+2^{n-1}a_1=(2^n-1)\cdot a_1$，即③正确；

对于④，因为 $a_{n+1}\leqslant 2a_n+1$，所以 $a_{n+1}+1\leqslant 2(a_n+1)$，所以 $a_n\leqslant(a_1+1)\cdot 2^{n-1}-1$，

所以 $S_n\leqslant(2^n-1)\cdot(a_1+1)-n$，即④正确. 综上共有 3 个正确.

所以平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，故选项 D 正确. 故选 ACD.

【命题立意】本题考查空间几何体中的线面位置关系，异面直线所成的角，线面角等问题，考查学生的直观想象、逻辑推理以及数学运算能力.

11.【答案】AD

【解析】不妨设 $O(0,0)$，直线 l 的方程为 $x=b$，$Q(b,kb)$、$P(x,y)$，

则由题意有 $\begin{cases} a=\sqrt{(x-b)^2+(kb-y)^2}, \\ y=kx, \end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，将 $k=\frac{y}{x}$ 代入化简得 $(x-b)^2(x^2+y^2)=a^2x^2(x\neq 0)$，

当 $x=0$ 时，$a=\sqrt{b^2(1+k^2)}=\sqrt{1+k^2}b$，

因此当 $a<b$ 时，不存在实数 k 使得等式成立，

即点 P 的轨迹为 $(x-b)^2(x^2+y^2)=a^2x^2(x\neq 0)$，不过原点，

当 $a\geqslant b$ 时，存在实数 k 使得等式成立，

即点 P 的轨迹方程为 $(x-b)^2(x^2+y^2)=a^2x^2$，经过原点.

对于选项 A，点 P 的轨迹方程为 $(x-1)^2(x^2+y^2)=4x^2$，故 A 正确；

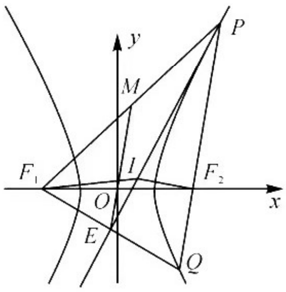
对于选项 B，由对称性易知，蚌线为轴对称图形，其对称轴为过点 O 且与直线 l 垂直的直线，B 错误；

对于选项 C，当 $a<b$ 时，C 错误；

对于选项 D，当 $x>a+b$ 或 $x<b-a$ 时，$a^2x^2=(x-b)^2(x^2+y^2)>a^2(x^2+y^2)$，不成立，因此对于蚌线上任意一点 $P(x,y)$，都有 $b-a\leqslant x\leqslant b+a$，（当 $y=0$ 时取等号），因此选项 D 正确；综上，选 AD.

【命题立意】本题考查利用曲线的方程研究曲线的相关性质，考查学生的直观想象、逻辑推理以及数学运算能力.

12.【答案】ABD



【解析】如图，对于选项 A，点 F_1 到直线 $x_1x-\frac{y_1}{3}y=1$ 的距离为 $d_1=\frac{|-2x_1-1|}{\sqrt{x_1^2+\frac{y_1^2}{9}}}$，点 F_2 到直线 $x_1x-\frac{y_1}{3}y=1$ 的距离为 $d_2=\frac{|2x_1-1|}{\sqrt{x_1^2+\frac{y_1^2}{9}}}$，所以 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{|2x_1+1|}{|2x_1-1|}$.

又 $|PF_1|=\sqrt{(x_1+2)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+2)^2+3(x_1^2-1)}=|2x_1+1|$，$|PF_2|=\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-2)^2+3(x_1^2-1)}=|2x_1-1|$，因此 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{|2x_1+1|}{|2x_1-1|}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$，

故直线 PI 的方程为 $x_1x-\frac{y_1}{3}y=1$，故 A 正确；

对于选项 B，由 $MO /\!/ PF_2$ 有 $\angle EPF_1=\angle EPF_2=\angle MEP$，因此 $|ME|=|PM|=|MF_1|$，

设 $|PF_2|=2t$，则 $|PF_1|=2+2t$，$|ME|=1+t$，$|MO|=\frac{1}{2}|PF_2|=t$，故 $|OE|=1$，

因此点 E 在以 O 为圆心，1 为半径的圆上，故 B 正确；

对于选项 C，设 $Q(x_2,y_2)$，由 A 选项可知，直线 PI 的方程为 $x_1x-\frac{y_1}{3}y=1$，直线 QI 的方程为 $x_2x-\frac{y_2}{3}y=1$，联立解之有 $x=\frac{y_2-y_1}{y_2x_1-y_1x_2}$，

设直线 PQ 的方程为 $x=my+2$，所以 $x=\frac{y_2-y_1}{y_2x_1-y_1x_2}=\frac{1}{2}$，

所以点 I 在定直线 $x=\frac{1}{2}$ 上，故 C 错误；

对于选项 D，由 C 选项可知 $I\left(\frac{1}{2},\frac{3x_1-6}{2y_1}\right)$，所以 $k_{IF_2}=-\frac{x_1-2}{y_1}$，又 $k_{PQ}=\frac{y_1}{x_1-2}$，

所以 $IF_2\perp PQ$，故 D 正确. 综上，选 ABD.

【命题立意】本题考查利用双曲线的有关性质，考查学生的直观想象、逻辑推理以及数学运算能力.

非选择题：

13.【答案】84

【解析】由 $C_n^2=C_n^7$，有 $n=9$，故展开式的通项为 $T_{r+1}=C_9^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r(x)^{9-r}=C_9^r x^{9-3r}$，故 $\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$ 的展开式中常数项为 $T_4=C_9^3=84$.

【命题立意】本题考查二项式定理，考查学生的逻辑推理、数学运算能力.

14.【答案】$2x-y-1=0$

【解析】设所求直线 l 与曲线 $y=x^2$ 和 $y=\ln(2x)$ 分别相切于点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则过点 P 的 $y=x^2$ 的切线方程为 $y=2x_1(x-x_1)+x_1^2=2x_1x-x_1^2$，

过点 Q 的 $y=\ln(2x)$ 的切线方程为 $y=\frac{1}{x_2}(x-x_2)+\ln(2x_2)=\frac{1}{x_2}x-1+\ln(2x_2)$，

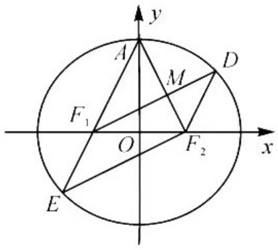
对比系数得 $\begin{cases}2x_1=\frac{1}{x_2},\\ x_1^2=1-\ln(2x_2),\end{cases}$

将 $x_2=\frac{1}{2x_1}$ 代入 $x_1^2=1-\ln(2x_2)$ 中得 $x_1^2-\ln x_1-1=0$，可取 $x_1=1$，

此时直线 l 的方程为 $y=2x-1$，即 $2x-y-1=0$.

【命题立意】本题考查曲线的公切线问题，考查学生的直观想象、逻辑推理以及数学运算能力.

15.【答案】$\frac{4}{5}$



【解析】如图，记直线 AF_1 与椭圆 C 的另一个交点为 E，连接 EF_2，

易知 $DF_1\parallel EF_2$，所以 $\frac{|MF_1|}{|AF_1|}=\frac{|EF_2|}{|AE|}$，

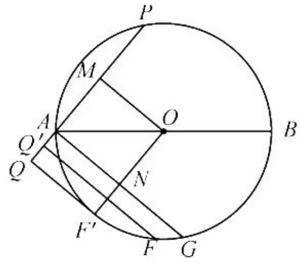
设 $|EF_1|=m$，则 $|AE|=a+m$，$|AF_2|=a$，

$|EF_2|=2a-m$，由 $AF_2\perp EF_2$，

可知 $a^2+(2a-m)^2=(a+m)^2$，解得 $3m=2a$，因此 $\frac{|MF_1|}{|AF_1|}=\frac{|EF_2|}{|AE|}=\frac{2a-m}{a+m}=\frac{4}{5}$.

【命题立意】本题考查椭圆的有关性质,考查学生的直观想象、逻辑推理以及数学运算能力.

16.【答案】$-\frac{3}{2}$



【解析】过点 A 作 $AP\parallel DE$ 交⊙O 于点 P,

则易知 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{DE}$,因此 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}$,

如图所示,

当点 P 位于 A、B 位置时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}\geqslant 0$,作$\angle PAG=90^\circ$($G$ 在⊙O 上),

当点 F 在劣弧上$\overset{\frown}{AG}$运动时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}<0$,当点 F 在优弧$\overset{\frown}{AG}$上运动时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}>0$,由题意可知点 F 在劣弧上$\overset{\frown}{AG}$运动,过点 O 作 AP 的垂线,垂足为 M,过点 O 作 AG 的垂线交 AG 于 N,交⊙O 于 F',分别过点 F,F'作 AP 的垂线,垂足分别为 Q',Q,

此时$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FQ'}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ'}\geqslant\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$(当 F,F'重合时取等),

设 $AM=d(d\in[0,6))$,则 $AP=2d$,$AQ=MQ-MA=3-d$,

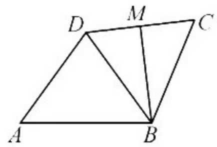
所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=-2d(3-d)=2d^2-6d=2\left(d-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$,

所以$(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF})_{\min}=-\frac{3}{2}$.

【命题立意】本题考查向量的数量积问题,考查学生的数学抽象、逻辑推理以及数学运算能力.

17.【解析】(1)在$\triangle ABD$中,由余弦定理有 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A=8-8\cos A$.

如图,作 $BM\perp CD$ 交 CD 于 M,设$\angle DBC=2\theta$,



则 $\sin\theta=\frac{1}{BD}$,$\cos\theta=\frac{\sqrt{BD^2-1}}{BD}$,

所以 $\sin\angle DBC=\frac{2\sqrt{BD^2-1}}{BD^2}$,

因此 $S_{\triangle BCD}=\sqrt{BD^2-1}=\sqrt{7-8\cos A}$,又 $S_{\triangle ABD}=2\sin A$,

由 $S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{3}}{2}S_{\triangle BCD}$ 有 $2\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{7-8\cos A}$,

则 $16\cos^2A-24\cos A+5=0$,

解之得 $\cos A=\frac{1}{4}$ 或 $\cos A=\frac{5}{4}$(舍),

此时 $BD^2=8-8\cos A=6$,$\sin\angle DBC=\frac{\sqrt{5}}{3}$; …………………………………………………… 5 分

(2)由(1)有 $\sin C=\cos\theta=\frac{\sqrt{BD^2-1}}{BD}$,$\sin\frac{A}{2}=\frac{BD}{4}$,$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1-\frac{BD^2}{16}}$,则 $\sin A=\frac{BD\cdot\sqrt{16-BD^2}}{8}$,

所以 $\sin A\cdot\sin C=\frac{\sqrt{(BD^2-1)(16-BD^2)}}{8}=\frac{\sqrt{-BD^4+17BD^2-16}}{8}$,

当 $BD^2=\frac{17}{2}$时,$\sin A\cdot\sin C$ 取最大值$\frac{15}{16}$. …………………………………………………… 10 分

【命题立意】本题考查余弦定理,考查学生的逻辑推理以及数学运算能力.

18.【解析】(1)连接 CM,点 Q 即为线段 CM 的中点,连接 PQ,

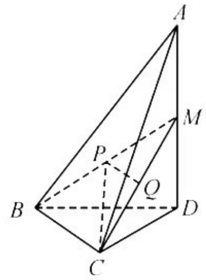
由于 $AD=BM=2CD=4$,$BC=2\sqrt{2}$,

$AD\perp$ 平面 BCD,所以 $BD=2\sqrt{3}$,

所以 $BC^2+CD^2=BD^2$,所以 $BC\perp CD$,

又因为 $AD\perp$ 平面 BCD,$BC\subset$ 面 BCD,$AD\perp BC$,$AD\cap CD=D$,所以 $BC\perp$ 平面 ACD,

………………………………………………………………………………………… 3 分

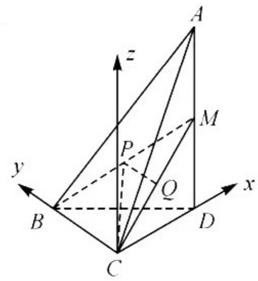


又因为 P,Q 分别为 BM,CM 的中点,所以 $PQ/\!/BC$,

所以 $PQ\perp$ 平面 ACD; ………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知,以 C 为坐标原点,CD,CB 分别为 x,y 轴,过 C 与 DA 平行的向上的方向为 z 轴,建立如图所示空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$,$D(2,0,0)$,$B(0,2\sqrt{2},0)$,$A(2,0,4)$,$M(2,0,2)$,$P(1,\sqrt{2},1)$,

所以 $\overrightarrow{CP}=(1,\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{BA}=(2,-2\sqrt{2},4)$, ……………………… 7 分



设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{2}y+z=0,\\ 2x=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(0,1,-\sqrt{2})$, …………………… 10 分

设直线 AB 与平面 CPD 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\dfrac{|-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4+8+16}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………………………………………… 12 分

【命题立意】本题考查线面垂直的判定,利用空间向量求线面角的问题,考查学生的直观想象、逻辑推理以及数学运算能力.

19.【解析】(1)因为 $2a_{n+1}-a_na_{n+1}=1$,所以 $a_{n+1}(2-a_n)=1$,又 $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$,即 $a_n=\dfrac{1}{b_n}+1$,

代入 $a_{n+1}(2-a_n)=1$ 中有 $\left(\dfrac{1}{b_{n+1}}+1\right)\left(1-\dfrac{1}{b_n}\right)=1$,化简得 $b_{n+1}=b_n-1$, ……………………………… 3 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$ 为首项,-1 为公差的等差数列,

所以 $b_n=\dfrac{1}{2}-(n-1)=\dfrac{3-2n}{2}$; …………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)有 $a_n=\dfrac{1}{b_n}+1=\dfrac{2}{3-2n}+1=\dfrac{5-2n}{3-2n}=\dfrac{2n-5}{2n-3}=\dfrac{2n-5}{2(n+1)-5}$, ……………………………………… 8 分

所以 $c_n=(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^2=\left(\dfrac{-3}{2n-3}\right)^2=\dfrac{9}{(2n-3)^2}$,

所以 $c_1=9$,$c_2=9$,

当 $n\geqslant 3$ 时,$c_n=\dfrac{9}{(2n-3)^2}<\dfrac{9}{(2n-3)(2n-5)}=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{2n-5}-\dfrac{1}{2n-3}\right)$, ……………………………………… 10 分

所以当 $n\geqslant 3$ 时,$S_n>S_2>S_1$,

且 $S_n<c_1+c_2+\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{2n-5}-\dfrac{1}{2n-3}\right)<18-\dfrac{9}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n-3}\right)<23$,

所以，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$S_n<23$. …………………………………………………………………… 12 分

【命题立意】本题考查已知数列的递推关系求数列的通项公式，利用裂项相消求数列的前 n 项和的问题，考查学生的逻辑推理以及数学运算能力.

20.【解析】(1)设 M 到直线 $y=-\frac{1}{2}$ 的距离为 d，

由于动圆 M 与圆 C 相外切，所以 $|MC|=d+\frac{1}{2}$，

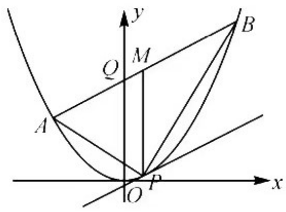
所以 M 到直线 $y=-1$ 的距离等于 M 到点 $C(0,1)$ 的距离，

由抛物线的定义可知，M 的轨迹 E 为抛物线，…………………………………………………… 3 分

其焦点为 $C(0,1)$，准线为 $y=-1$，

所以抛物线 E 的方程为 $x^2=4y$；…………………………………………………………………… 5 分

(2)设点 $P(2m,m^2)$，



由 $y'=\frac{1}{2}x$ 可知，直线 l 的斜率为 m，

所以直线 AB 的方程为 $y=mx-5$，…………………………………… 7 分

代入 $x^2=4y$ 中有 $x^2-4mx-20=0$，

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4m$，$x_1x_2=-20$，……………………… 9 分

记线段 AB 的中点为 M，则 $MP\perp x$ 轴.

由于 $PA\perp PB$，所以 $|MP|=\frac{1}{2}|AB|$，

又 $|MP|=|2m^2+5-m^2|=m^2+5$，$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{16m^2-80}$， ………………………………… 11 分

联立解之有 $m^2=\frac{1}{3}$，所以点 P 的纵坐标为 $\frac{1}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

【命题立意】本题考查利用定义法求曲线的轨迹方程，直线与抛物线的位置关系，考查学生的逻辑推理以及数学运算能力.

21.【解析】(1)设事件 A 为在本次点球大战中，两队进入了突然死亡阶段，

由已知有两队的比分可能为 $2:2$，$3:3$，$4:4$，

记事件 B、C、D 分别表示两队的比分为 $2:2$，$3:3$，$4:4$，…………………………………… 1 分

则 $P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$，

$P(B)=\left(\frac{2}{10}\right)^3\times C_3^1\times\frac{7}{10}\times\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{8\times7\times27}{10^6}$，……………………………………………… 2 分

$P(C)=C_3^1\times\frac{8}{10}\times\left(\frac{2}{10}\right)^2\times C_3^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\frac{3}{10}=\frac{32\times7^2\times27}{10^6}$，…………………………………… 3 分

$P(D)=C_3^2\times\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{128\times7^3\times3}{10^6}$，………………………………………… 4 分

$\therefore P(A)=\frac{175560}{10^6}=0.17556$，$\therefore P(\overline{A})=1-0.17556=0.82444\approx0.82$.

所以两队没有进入突然死亡阶段的概率为 0.82；……………………………………………… 5 分

(2)若法国队先踢点球，则 $X=8$，此时阿根廷队的第四名队员踢进了点球，法国队的第四名队员没有踢进，

$P_1=\frac{8}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{24}{100}$, …………………………………………………………………………………… 6 分

若阿根廷队先踢点球,则 X 的可能取值有 8,9,

当 $X=8$ 时,此时法国队的第四名队员没有踢进,阿根廷队的第四名队员踢进了点球,$P_2=\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{24}{100}$,

…………………………………………………………………………………………………… 8 分

当 $X=9$ 时,此时阿根廷队的第四名队员没有踢进,第五名队员踢进了点球,法国队的第四名队员没有踢进点球,$P_3=\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{48}{1000}$, …………………………………………………………………… 10 分

综上,在本次点球大战中,阿根廷队在没有进入突然死亡阶段就以 4 : 2 的比分获得了胜利的条件下,$P(X=8)=\frac{P_1+P_2}{P_1+P_2+P_3}=\frac{10}{11}$,$P(X=9)=1-P(X=8)=\frac{1}{11}$,

$\therefore E(X)=8\times\frac{10}{11}+9\times\frac{1}{11}=\frac{89}{11}$. …………………………………………………………………… 12 分

【命题立意】本题考查概率的基本运算,分布列及期望的求法等知识,考查学生的数据处理、逻辑推理以及数学运算能力.

22.【解析】(1)法一:令 $F(x)=f(x)-a$,由已知有 $F(x)$ 的零点为 x_1+a、x_2+a,

下证:$f(x)=e^x-x>|x|$ 恒成立.

当 $x<0$ 时,$f(x)=e^x-x>|x|\Leftrightarrow e^x>0$,显然成立.

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=e^x-x>|x|\Leftrightarrow e^x-2x>0$, ……………………………………………………… 2 分

令 $G(x)=e^x-2x$,$G'(x)=e^x-2$,

因此 $G(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减,在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增, …………………………………………… 4 分

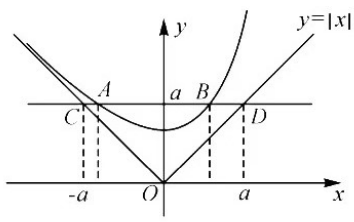
所以 $G(x)\geqslant G(\ln 2)=2-2\ln 2>0$,命题成立;

综上,$f(x)=e^x-x>|x|$ 恒成立.

又 $F'(x)=e^x-1$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

综上,得到大致图象如图.



因此 $|x_2-x_1|=|x_B-x_A|<|x_D-x_C|=2a$. ……………………………… 5 分

法二:令 $F(x)=f(x+a)-a=e^{x+a}-x-2a$,$F'(x)=e^{x+a}-1$,

因此 $F(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上单调递减,在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x)_{\min}=F(-a)=1-a<0$,即 $a>1$,

此时 $F(0)=e^a-2a$,令 $G(x)=e^x-2x$,$G'(x)=e^x-2$,

所以 $G(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减,在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $G(x)_{\min}=G(\ln 2)=2-2\ln 2>0$, …………………………………………………………………… 3 分

所以 $F(0)=e^a-2a>0$,所以 $F(-a)F(0)<0$,

又 $F(-2a)=e^{-a}>0$,所以 $F(-2a)F(-a)<0$,

不妨设 $x_1<x_2$,由 $F(x)$ 的单调性可知 $-2a<x_1<-a<x_2<0$,

所以$|x_2-x_1|<|0-(-2a)|<2a$；…………………………………………………………………… 5分

(2)当$a\leqslant 0$时，$f(x+a)+\frac{1}{2}x^2\geqslant|a|$等价于$e^{x+a}+\frac{1}{2}x^2-x\geqslant 0$，

令$g(x)=e^{x-a}+\frac{1}{2}x^2-x$，$g'(x)=e^{x-a}+x-1$，…………………………………………… 6分

易知$g'(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，又$g'(0)=e^{a}-1\leqslant 0$，$g'(1)=e^{1-a}>0$，

所以$\exists x_0\in[0,1)$使得$g'(x_0)=e^{x_0-a}+x_0-1=0$，

故$g(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

因此$g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0-a}+\frac{1}{2}x_0^2-x_0=\frac{1}{2}x_0^2-2x_0-1$，

由于$f(x+a)+\frac{1}{2}x^2\geqslant|a|$恒成立，所以$\frac{1}{2}x_0^2-2x_0+1\geqslant 0$恒成立，

解之得$0\leqslant x_0\leqslant 2-\sqrt{2}$，

又由$e^{x_0+a}+x_0-1=0$有$a=\ln(1-x_0)-x_0$，

而函数$y=\ln(1-x_0)-x_0$在定义域内单调递减，

所以$a\in[\ln(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}-2,0]$．……………………………………………………………… 8分

当$a>0$时，$f(x+a)+\frac{1}{2}x^2\geqslant|a|$等价于$e^{x+a}+\frac{1}{2}x^2-x-2a\geqslant 0$，

令$h(x)=e^{x-a}+\frac{1}{2}x^2-x-2a$，$h'(x)=e^{x-a}+x-1$，

易知$h'(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，又$h'(-a)=-a<0$，$h'(0)=e^{a}-1>0$，

所以$\exists x_0\in(-a,0)$使得$g'(x_0)=e^{x_0-a}+x_0-1=0$，

因此$h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0-a}+\frac{1}{2}x_0^2-x_0-2a=\frac{1}{2}x_0^2-2x_0+1-2a$

$=\frac{1}{2}x_0^2+1-2(a-x_0)=\frac{1}{2}x_0^2+1-2\ln(1-x_0)(x_0\in(-a,0))$，

由于$f(x+a)+\frac{1}{2}x^2\geqslant|a|$恒成立，所以$\frac{1}{2}x_0^2+1-2\ln(1-x_0)\geqslant 0$恒成立，………………………… 10分

令$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2+1-2\ln(1-x)(x<0)$，$\varphi'(x)=x-\frac{2}{x-1}=\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$．

易知$\varphi(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,0)$上单调递增，

所以$\varphi(x)_{\min}=\varphi(-1)=\frac{3}{2}-2\ln 2$．

因为$e^3>2.6^3>17>16$，所以$3>4\ln 2$，因此$\varphi(x)>0$恒成立，

故当$a>0$时，$f(x+a)+\frac{1}{2}x^2\geqslant|a|$恒成立．

综上，实数a的取值范围为$[\ln(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}-2,+\infty)$．………………………………………………… 12分

【命题立意】本题考查应用导数研究函数的单调性和证明不等式，考查学生的逻辑推理以及数学运算能力．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。