2023－2024学年高三上学期河南省郑州外国语学校第三次调研考试数学试题

1．A 【分析】先化简得出集合 A,B，再利用集合的并集运算即可得解．

【详解】由 $2^x<4$ 可得 $x<2$，则 $A=\{x|2^x<4,x\in\mathbf{N}^*\}=\{1\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|-1<x<2\}=\{0,1\}$，所以 $A\cup B=\{0,1\}$．

故选：A．

2．A 【分析】利用复数的运算化简复数 z，再由复数的坐标表示即可得解．

【详解】由题意，$z=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})+2=\mathrm{i}-\mathrm{i}^2+2=3+\mathrm{i}$，

所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(3,1)$，位于第一象限．

故选：A．

3．D 【分析】求导可判断 A，根据导数的几何意义可判断 B，根据导数的正负与函数单调性的关系可判断 C，利用函数的单调性可判断 D．

【详解】对于 A，求导得 $f'(x)=-\mathrm{e}^x+(2-x)\mathrm{e}^x=(1-x)\mathrm{e}^x$，故 A 错误；

对于 B，$f(x)$ 的图象在 $x=2$ 处的切线斜率 $k=f'(2)=-\mathrm{e}^2<0$，故 B 错误；

对于 C，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，故 C 错误；

对于 D，可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值为 $f(1)=\mathrm{e}$，故 D 正确；

故选：D

4．D 【分析】由题意，点 $(-2,0)$ 到圆心的距离是半径的 $\sqrt{2}$ 倍，列方程求解即可．

【详解】圆 $x^2+y^2-4x-m=0$ 化为标准方程为 $(x-2)^2+y^2=4+m$，

圆心坐标为 $(2,0)$，半径 $r=\sqrt{4+m}$，

过点 $(-2,0)$ 与圆相切的两条直线垂直，则点 $(-2,0)$ 到圆心 $(2,0)$ 的距离为 $\sqrt{2}r$，

即 $4=\sqrt{2}\times\sqrt{4+m}$，解得 $m=4$．

故选：D．

5．A 【分析】分别求得双曲线 C_1,C_2 的离心率，结合 $e_2=\frac{3}{4}e_1$，列出方程，即可求解．

【详解】由双曲线 $C_1:x^2-y^2=1$，可得其离心率为 $e_1=\sqrt{2}$，

又由双曲线 $C_2:\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，可得其离心率为 $e_2=\frac{\sqrt{8+b^2}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{8}}$，

因为 $e_2=\frac{3}{4}e_1$，可得 $\sqrt{1+\frac{b^2}{8}}=\frac{3}{4}\times\sqrt{2}$，解得 $b=1$．

故选：A．

6．C

【分析】根据分组方法，结合组合数、排列数等知识求得正确答案．

【详解】先将6名同学分成4组：一种方式是甲、乙组成一组，再从另外4人任选2人组成一组，其余的一人一组，

另一种方式是甲、乙与另外4人中的1人组成一组，其余的一人一组．再把4组人分到4个场馆，

所以安排方法种数为 $(C_4^2+C_4^1)A_4^4=240$．

故选：C

7．A 【分析】根据等比数列通项公式得到 a_n，之后代入题中式子求得 b_n，利用裂项相消法求和，之后求得 n 所满足的条件，最后确定出 n 的最小值．

【详解】由题意得 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_n=\frac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-$

$\frac{1}{2^{n+1}-1}$,

所以 $T_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,

令 $1-\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{99}{100}$,整理得 $2^{n+1}>101$,解得 $n\geqslant 6$,故选:A.

8. A 【分析】利用两角和的正切公式进行转化,结合基本不等式求得 $\tan\alpha+\tan\beta+2\geqslant 2\sqrt{2}$,从而求得 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的最小值.

【详解】因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$,

所以 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$

$=1+(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$,

所以 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)\leqslant\left(\frac{1+\tan\alpha+1+\tan\beta}{2}\right)^2$,

即 $2\leqslant\frac{(\tan\alpha+\tan\beta+2)^2}{4}$,得 $(\tan\alpha+\tan\beta+2)^2\geqslant 8$,

由于 α,β 为锐角,所以 $\tan\alpha+\tan\beta+2>0$,所以 $\tan\alpha+\tan\beta+2\geqslant 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\tan\alpha=\tan\beta=\sqrt{2}-1$ 时等号成立,

所以 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

故选:A

9. ABC 【分析】由甲组平均数为 $\bar{x}=3$,则乙组平均数为 $2\bar{x}+a=5$,解得 a 值,又乙组方差为甲组方差的 a^2 倍,可判断选项 AB,再利用极差与中位数定义判断 CD 项.

【详解】对选项 A,由题意可知,$2\times3+a=5$,$a=-1$,故 A 错误;

对选项 B,易知乙组样本数据的方差为甲组样本数据方差的 $2^2=4$ 倍,故 B 错误;

对选项 C,不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$,

则甲组数据的极差为 x_n-x_1,

乙组数据的极差为 $(2x_n-1)-(2x_1-1)=2(x_n-x_1)$,

又已知甲组数据各不相同,

所以两组样本数据的极差不相等,故 C 错误;

对选项 D,设甲组样本数据的中位数为 m,

则乙组样本数据的中位数为 $2m-1$,

当 $m=1$ 时,$m=2m-1$,

所以两组样本数据的中位数可能相等,故 D 正确.

故选:ABC.

10. AC 【分析】对于 A,由 $0\leqslant 2x\leqslant 2$ 求解判断,对于 B,利用换元法根据指数函数的单调性分析判断,对于 C,对函数变形后,利用反比例函数的对称性和函数图象变换规律分析判断,对于 D,利用换元法分析判断.

【详解】对于 A,由题意得 $0\leqslant 2x\leqslant 2$,得 $0\leqslant x\leqslant 1$,所以函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0,1]$,所以 A 正确,

对于 B,令 $t=-x^2+1$,则 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$,因为 $t\leqslant 1$,且 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在定义域内递减,

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^t\geqslant\frac{1}{2}$,所以 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$,所以 B 错误,

对于 C,因为 $y=\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x+2)-1}{x+2}=1+\frac{-1}{x+2}$,所以 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 是由反比例函数 $y=\frac{-1}{x}$ 向左平移2个单位长度,再向上平移1个单位长度得到的,

因为 $y=\frac{-1}{x}$ 的对称中心为 $(0,0)$,所以 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 的对称中心为 $(-2,1)$,所以 C 正确,

对于 D,由 $x^2-4x-5>0$,得 $x<-1$ 或 $x>5$,所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$,令 $t=x^2-4x$

-5，则 $y=\log_2 t$，

因为 $t=x^2-4x-5$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，在 $(5,+\infty)$ 上递增，且 $y=\log_2 t$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，所以 $f(x)=\log_2(x^2-4x-5)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，在 $(5,+\infty)$ 上递增，所以 D 错误，

故选：AC

11．BCD

【分析】先根据 $f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，得出 $f(x)$ 是奇函数，从而判断 A 项；由 $f(x+4)+f(x)=2f(2)$ 利用赋值法求出 $f(2)$，再结合 $f(x)$ 是奇函数可判断 B 项；利用 $g(x)=f(4-2x)$ 结合 $f(x+4)+f(x)=0$ 可判断 C 项；求出 $f(x)$ 的周期可判断 D 项．

【详解】因为函数 $f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，所以 $f(x)$ 的图像关于原点对称，即 $f(x)$ 是奇函数，故 A 错误；

因为 $f(x+4)+f(x)=2f(2)$，所以令 $x=-2$ 得 $f(2)=f(-2)$，

又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(2)=f(-2)=0$，

所以 $f(x+4)+f(x)=0$，即 $f(x+4)=-f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，故 B 正确；

因为 $f(x+4)=-f(x)$，$g(x)=f(4-2x)$，$f(x)$ 是奇函数，

所以 $g\left(-\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，故 C 正确；

因为 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 8，

又 $g(x+2)=f[4-2(x+2)]=f(-2x)$，$g(x-2)=f[4-2(x-2)]=f(8-2x)$，

所以 $g(x+2)=g(x-2)$，故 D 正确；

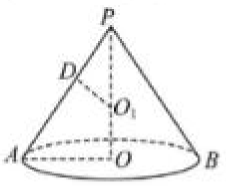
故选：BCD．

12．BCD

【分析】结合底面半径和侧面积求出母线，圆锥的高，求解圆锥的体积判断 A，由内接球的性质，结合几何关系即可求解 r_1 即可判断 B；由 $h<r$ 可判断过点 P 作平面 α 截圆锥 OP 的截面面积最大时对应三角形为等腰直角三角形，结合面积公式可求解判断 C；由侧面展开图，结合余弦定理求解判断 D．

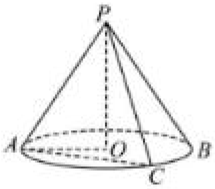
【详解】因为 $S_{侧}=\pi rl=\frac{3}{2}\pi l$，$S_{底}=\pi r^2$，由 $S_{底}:S_{侧}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 解得 $l=\sqrt{3}$，

即圆锥母线长为 $\sqrt{3}$，则高 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\pi=\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$，故 A 错误，设内切球 O_1 的半径为 r_1，O_1D 垂直于交 PA 于点 D，如图，



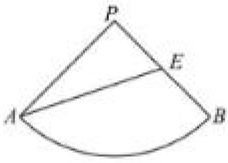
则对 $\triangle PDO_1$，由于 $PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$PA=\sqrt{3}$，$\therefore \angle APO=60^\circ$，所以 $O_1D=O_1P\sin\angle APO$，所以 $(h-r)\frac{\sqrt{3}}{2}=r$ $\Rightarrow r=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$，故 B 正确，

过点 P 作平面 α 截圆锥 OP 的截面面积的最大时，由于 $\triangle PAC$ 为等腰三角形，如图，



因为 $h<r$，故恰好 $PA\perp PC$ 时取到最大值，此时 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，故 C 正确；

沿母线 PA，PB 剪开，并将圆锥的半侧面展开如图，



易知 $PA=2PE=\sqrt{3}$，又 AB 弧长为 $\pi r=\frac{3}{2}\pi$，$\therefore\angle APE=\frac{\frac{3}{2}\pi}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，

$\therefore$ 所求最近路线长 $AE=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}=\sqrt{\frac{15}{4}-3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$，$D$ 正确.

故选：ACD.

13. $\frac{\pi}{4}$

【分析】根据题意，利用向量的运算法则，求得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，结合向量的夹角公式，即可求解.

【详解】因为 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{2}$，可得 $\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=2$，

又因为 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{\pi}{4}$.

14. 2

【分析】根据给定条件，利用圆柱、球的体积公式计算作答.

【详解】依题意，$V_1=\pi R^2\cdot\frac{4R}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}$，$V_2=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{2\pi R^3}{3}$，

所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{2\pi R^3}{3}}=2$.

故答案为：2

15. 16

【分析】先根据题意求 ω，φ，分析可知方程 $f(x)=g(x)$ 的实根为 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的交点的横坐标，根据图象结合函数的对称性运算求解.

【详解】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，

由题意可知：$\frac{T}{2}=3$，可得 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=6$，且 $\omega>0$，解得 $\omega=\frac{\pi}{3}$，

又因为 $f(1)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+\varphi<\frac{5\pi}{6}$，可得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{2\pi}{3}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

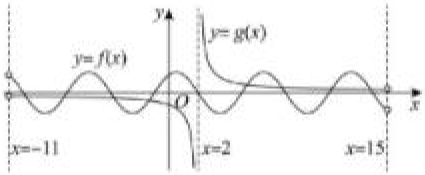
所以 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$，

又因为 $f(2)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\pi=0$，所以 $f(x)$ 关于点 $(2,0)$ 对称，

且函数 $g(x)=\frac{1}{x-2}, x\in(-11,2)\cup(2,15)$ 关于点 $(2,0)$ 对称，

由题意可知：方程 $f(x)=g(x)$ 的实根为 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的交点的横坐标，

在同一坐标系内作出两个函数图象，如图所示，



由图象可知：函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有 8 个交点，

结合对称性可知：方程 $f(x)=g(x)$ 的所有实根之和为 $\frac{8}{2}\times 4=16$.

故答案为：16.

16. 8

【分析】先设出直线 l 的方程，联立抛物线方程，得到两根之和，两根之积，表达出 $AB=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|$，$BC=\sqrt{1+m^2}\cdot y_2$，再由正弦定理得到 $\frac{CF}{AF}=\frac{BC}{AB}$，得到 $\frac{4}{my_1}=\frac{y_2}{y_1-y_2}$，代入两根之和，两根之积，列出方程，求出 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，进而求出 $y_1=4\sqrt{3}$，$|AF|=8$.

【详解】由题意得，$F(2,0)$，$C(-2,0)$，当直线 l 的斜率为 0 时，与抛物线只有 1 个交点，不合要求，

故设直线 l 的方程为 $x=my-2$，不妨设 $m>0$，

联立 $y^2=8x$，可得 $y^2-8my+16=0$，易得 $\Delta>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1>0, y_2>0$，

则 $y_1+y_2=8m, y_1y_2=16$，

则 $AB=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|$，$BC=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot y_2$，

由正弦定理得 $\frac{CF}{\sin\angle CBF}=\frac{BC}{\sin\angle CFB}$，$\frac{AF}{\sin\angle ABF}=\frac{AB}{\sin\angle AFB}$，

因为 $\angle AFB=\angle CFB$，$\angle CBF+\angle ABF=\pi$，

所以 $y_1>y_2$，$\frac{CF}{AF}=\frac{BC}{AB}$，即 $\frac{4}{AF}=\frac{\sqrt{1+m^2}\cdot|y_2|}{\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|}=\frac{y_2}{y_1-y_2}$，

又由焦半径公式可知 $AF=x_1+2=my_1-2+2=my_1$，

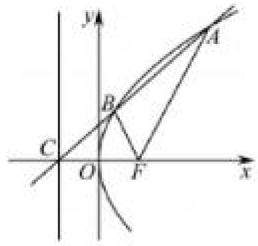
则 $\frac{4}{my_1}=\frac{y_2}{y_1-y_2}$，即 $my_1y_2=4y_1-4y_2=4\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$，

即 $16m=4\sqrt{64m^2-64}$，解得 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

则 $y_1+y_2=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，$y_1y_2=16$，解得 $y_1=4\sqrt{3}$，

故 $|AF|=my_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 4\sqrt{3}=8$，

当 $m<0$ 时，同理可得到 $|AF|=8$.



故答案为：8

【点睛】方法点睛：解三角形中，当条件中有角平分线时，可利用正弦定理得到角平分线的性质，将角的关系转化为边的比例关系，再进行求解.

17. (1)$\frac{\pi}{3}$ (2)18

【分析】(1) 由正弦定理及两角差的正弦公式得出结果；

(2) 由三角形面积公式及余弦定理得出结果；

【详解】(1) 由 $a\cos C+\sqrt{3}c\sin A=b+c$ 及正弦定理得：$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$

因为 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$.

由于 $\sin C\neq 0$，$\therefore\sqrt{3}\sin A-\cos A-1=0$

所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$，故 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由题得 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=9\sqrt{3}$，故 $bc=36$ ①

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

又 $a=6$，故 $b^2+c^2=72$ ②，

由①②得：$b+c=12$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=18$.

18. (1)$a_n=2n$ (2)$T_n=\frac{9n}{4}\cdot 9^n-\frac{9}{32}\cdot 9^n+\frac{9}{32}$

【分析】(1) 当 $n=1$ 时，求 a_1；当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，由此即可求解.

(2) 等差数列与等比数列之积，用错位相减法即可求解.

【详解】①当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2+1=2$；

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-[(n-1)^2+(n-1)]=2n$；

经检验：$a_1=2$ 满足上式，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n$.

(2) 由 (1) 得，$T_n=2\cdot3^2+4\cdot3^4+\cdots+(2n-2)\cdot3^{2n-2}+(2n)\cdot3^{2n}$，

$9T_n=2\cdot3^4+4\cdot3^6+\cdots+(2n-2)\cdot3^{2n}+(2n)\cdot3^{2n+2}$，

所以 $-8T_n=2\cdot3^2+2\cdot3^4+\cdots+2\cdot3^{2n-2}+2\cdot3^{2n}-(2n)\cdot3^{2n+2}$.

即 $T_n=\frac{n\cdot3^{2n+2}}{4}-\frac{3^2(3^{2n}-1)}{32}$，即 $T_n=\frac{9n}{4}\cdot9^n-\frac{9}{32}\cdot9^n+\frac{9}{32}$.

19. (1) 列联表见解析；成绩优秀与是否经常体育锻炼有关联

(2) 分布列见解析

【分析】(1) 根据题意，得到 2×2 列联表，求得 χ^2 的值，结合附表，即可得到结论；

(2) 根据题意，求得抽取的 10 人中合格有 7 人，优秀的为 3 人，得到 X 服从超几何分布，得出 X 的可能值，求得相应的概率，列出分布列.

【详解】(1) 解：根据题意，得到 2×2 列联表

	经常锻炼	不经常锻炼	合计
合格	25	45	70
优秀	20	10	30
合计	45	55	100

零假设 H_0：成绩是否优秀与是否经常体育锻炼无关，

可得 $\chi^2=\dfrac{100(25\times10-45\times20)^2}{70\times30\times45\times55}\approx8.129>6.635$.

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，

所以 99% 的把握认为成绩优秀与是否经常体育锻炼有关联.

(2) 解：根据频率分布直方图，可得大于 600 分的频率为 $(0.0125+0.0025)\times20=0.3$，

小于 600 分的频率为 $1-0.3=0.7$，

所以由分层抽样知，抽取的 10 人中合格有 $10\times0.7=7$ 人，优秀的为 $10\times0.3=3$ 人，

则从这 10 人中随机抽取 5 人，优秀人数 X 服从超几何分布，

由题意 X 的可能值为 0，1，2，3

可得 $P(X=0)=\dfrac{C_7^5C_3^0}{C_{10}^5}=\dfrac{1}{12}$，$P(X=1)=\dfrac{C_7^4C_3^1}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{12}$，$P(X=2)=\dfrac{C_7^3C_3^2}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{12}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_7^2C_3^3}{C_{10}^5}=\dfrac{21}{252}=\dfrac{1}{12}$

所以随机变量 X 分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

20．(1) 证明见解析　(2) $\dfrac{\sqrt6}{3}$　(3) $\dfrac{2}{3}\sqrt3$

【分析】(1) 由已知条件推导出 $BF\perp AE$，$CB\perp AB$，从而得到 $CB\perp$ 平面 ABE，由此能够证明 $AE\perp$ 平面 BCE.

(2) 建立空间直角坐标系，利用向量法能求出二面角 $B-AC-E$ 的正弦值.

(3) 利用向量法能求出点 D 到平面 ACE 的距离.

【详解】(1) $\because BF\perp$ 平面 ACE，$AE\subset$ 平面 ACE，$\therefore BF\perp AE$，

$\because$ 二面角 $D-AB-E$ 为直二面角，且交线为 AB，$CB\perp AB$，$CB\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore CB\perp$ 平面 ABE，$AE\subset$ 平面 ABE

$\therefore CB\perp AE$，$BC\cap BF=B$，BC，$BF\subset$ 平面 BCE，

$\therefore AE\perp$ 平面 BCE.

(2) 以线段 AB 的中点为原点 O，OE，AB 所在直线为 x 轴，y 轴，过点 O 平行于 AD 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

$\because AE\perp$ 平面 BCE，$BE\subset$ 平面 BCE，$\therefore AE\perp BE$，

在 $Rt\triangle AEB$ 中，$AB=2$，O 为 AB 的中点，

$\therefore OE=1$，$\therefore A(0,-1,0)$，$E(1,0,0)$，$C(0,1,2)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,1,0),\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$，

设平面 AEC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\\\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\2y+2z=0\end{cases}$，

取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-1,1)$

又平面 BAC 的法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，

$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

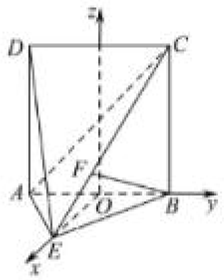
设二面角 $B-AC-E$ 的平面角为 θ，

则 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore$ 二面角 $B-AC-E$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) $\because AD\,//\,z$ 轴，$AD=2$，$\therefore\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$，

$\therefore$ 点 D 到平面 ACE 的距离：$d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



21．(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　(2) 证明见解析

【分析】(1) 根据三角形面积公式，利用代入法进行求解即可；

(2) 根据对称性与直线间斜率的关系，结合一元二次方程根与系数的关系进行求解即可.

【详解】(1) 因为 $\triangle OFM$ 的面积为 $\dfrac{3}{4}$，则有 $\dfrac{1}{2}\times c\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$，解得 $c=1$，

又因为 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，则 $\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\\a^2-b^2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=4\\b^2=3\end{cases}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2) 根据椭圆的对称性，欲证 A,D 关于 x 轴对称，

只需证 $k_{FA}=-k_{FD}$，即证 $k_{FA}+k_{FB}=0$，

设 $A(x_2,y_2),B(x_1,y_1)$，直线 AB 方程为 $x=my+4$，

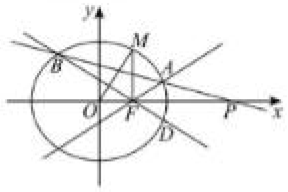
由 $\begin{cases}x=my+4\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-24m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$

则 $k_{FA}+k_{FB}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{y_1(x_2-1)+y_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\dfrac{y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

因为 $y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)=2my_1y_2+3(y_1+y_2)=2m\times\dfrac{36}{3m^2+4}+3\dfrac{-24m}{3m^2+4}=0$

所以 $k_{FA}+k_{FB}=0$，即 A,D 关于 x 轴对称.



【点睛】关键点睛：本题的关键是由 $k_{FA}+k_{FB}=0$，可以判断 A,D 关于 x 轴对称.

22. (1)$[1,+\infty)$ (2) 证明见解析

【分析】(1) 由 $f(x)\geq 0$ 恒成立，利用导数求 $f(x)$ 最小值，利用不等式求实数 a 的取值范围；

(2) 由 $f(x)\geq 0$ 恒成立，通过换元可得 $\dfrac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$，$k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$，构造函数证明 $\sin x<x(x<0)$，可证问题中的不等式.

【详解】(1) 函数 $f(x)=xe^x-e^x+a(a\in\mathbf{R})$ 定义域为 R，$f'(x)=xe^x$，

由 $f'(x)>0$ 解得 $x>0$，故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $f'(x)<0$ 解得 $x<0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 的最小值是 $f(0)=a-1\geq 0$，解得 $a\geq 1$，所以实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

(2) 在 (1) 中，令 $a=1$ 时，$xe^x-e^x+1\geq 0$，令 $t=e^x$，得 $t\ln t-t+1\geq 0$，即 $\ln t\geq 1-\dfrac{1}{t}$，令 $t=\dfrac{n+k}{n+k-1}$，则 $\ln\dfrac{n+k}{n+k-1}>\dfrac{1}{n+k}$，

所以，$\dfrac{1}{n+k}<\ln\dfrac{n+k}{n+k-1}=\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$，$k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$，

令 $g(x)=x-\sin x(x>0)$，则 $g'(x)=1-\cos x\geq 0$. 且 $g'(x)$ 不恒为零.

所以，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)>g(0)=0$，则 $\sin x<x(x<0)$.

所以，$\sin\dfrac{1}{n+k}<\dfrac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$，$k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$，

所以，$\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}$

$<[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots+[\ln(2n)-\ln(2n-1)]$

$=\ln(2n)-\ln n=\ln\dfrac{2n}{n}=\ln 2$.

【点睛】方法点睛：

1. 导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题. 注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极（最）值问题处理.

2. 利用导数解决含参函数的单调性问题时，一般将其转化为不等式恒成立问题，解题过程中要注意分类讨论和数形结合思想的应用.

3. 证明不等式，构造一个适当的函数，利用它的单调性进行解题，是一种常用技巧. 许多问题，如果运用这种思想去解决，往往能获得简洁明快的思路，有着非凡的功效.