

高三数学考试卷参考答案

1. D 集合 $M = \{x | -2 < x < 2\}$, 集合 $N = \{x | x \geq -\frac{1}{2}\}$, $M \cup N = \{x | x > -2\}$.
2. A 因为 $(2z+3)i = 3z$, 所以 $z = \frac{3i}{3-2i} = \frac{3i(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = -\frac{6}{13} + \frac{9}{13}i$, $z = -\frac{6}{13} + \frac{9}{13}i$, 故 $\bar{z} = -\frac{6}{13} - \frac{9}{13}i$, $(-\frac{6}{13} - \frac{9}{13}i)^2 = \frac{18}{13}i$.
3. C 对应的底数越大, 图象越靠近 x 轴, 故 $f(x), g(x), h(x)$ 的图象所对应的编号依次为③②①.
4. C 台体体积公式: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$. 由题意可得 $h = 50 - 41 = 9$ m, $S_1 = 160 \times 1000^2 = 1.6 \times 10^8$ m², $S_2 = 140 \times 1000^2 = 1.4 \times 10^8$ m², 代入计算得 $V = 3 \times 10^8 \times (3 + 0.4\sqrt{14}) \approx 1.3 \times 10^9$ m³.
5. D 不同的分配方案有 $C_4^3 C_3^3 A_3^3 = 108$ 种.
6. B 可设该抛物线的方程为 $y^2 = 2px$, 点 A 的坐标为 $(2, 3)$, 所以 $9 = 4p$, 则 $p = \frac{9}{4}$, 该抛物线的方程为 $y^2 = \frac{9}{2}x$. 当 PQ 与抛物线的准线垂直时, $|PF| + |PQ|$ 取得最小值, 且最小值为 $\frac{15}{8} + \frac{9}{8} = 3$.
7. C 设该等比数列的公比为 $q (q > 0)$, 则 $q^5 = \frac{b}{a}$, 即 $q = \sqrt[5]{\frac{b}{a}}$, 则大吕和夹钟的波长分别为 $a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{a^2 b}$, $a \cdot (\sqrt[3]{\frac{b}{a}})^2 = \sqrt[3]{ab^2}$, 故大吕和夹钟的波长之和为 $\sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{ab^2}$.
8. A 由题意可知正三棱锥的底面边长为 x , 斜高为 1, 则高为 $\sqrt{1 - \frac{x^2}{12}}$, 容积 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{x^4 (1 - \frac{x^2}{12})}$.
- 解法一: $V = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{\frac{1}{24} (24 - 2x^2) x^4} \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \times \sqrt{\frac{1}{24} \times (\frac{24 - 2x^2 + x^2 + x^2}{3})^3} = \frac{2}{3}$.
- 解法二: $V = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{\frac{x^6}{12} + x^4}$, 令 $y = \frac{x^6}{12} + x^4$, $y' = \frac{x^5}{2} + 4x^3 = \frac{x^3}{2} (x^2 + 8)$, 当 $0 < x < 2\sqrt{2}$ 时, $y' > 0$, 当 $2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{3}$ 时, $y' < 0$, 所以函数 $y = \frac{x^6}{12} + x^4$ 在 $(0, 2\sqrt{2})$ 上单调递增; 在 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ 上单调递减, $y_{\max} = \frac{(2\sqrt{2})^6}{12} + (2\sqrt{2})^4 = \frac{64}{3}$, $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{2}{3}$.
9. AB 该商家这 8 个月中, 线上收入与线下收入相差最大的月份是 1 月, C 错误. 该商家这 8 个月中, 每月总收入不少于 17 万元的频率为 $\frac{1}{2}$, D 错误.
10. ABD 因为 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 所以 $|\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2 = |\overrightarrow{F_1 F_2}|^2 = 32$. 由双曲线的定义可得 $||\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}|| = 4$ ①, 所以 $2|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| = |\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2 - (|\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}|)^2$, 解得 $|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| = 8$, 故 $\triangle PF_1 F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2} |\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| = 4$, D 正确. 设 P 的纵坐标为 h , $\triangle PF_1 F_2$ 的面积 $\frac{1}{2} |\overrightarrow{F_1 F_2}| \cdot h = 4$, 解得 $h = \sqrt{2}$, A 正确. $(|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}|)^2 = |\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2 + 2|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}|$, 解得 $|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 4\sqrt{3}$ ②, $\triangle PF_1 F_2$ 的周长为 $|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| + |\overrightarrow{F_1 F_2}| = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$, C 错误. ①+②可得 $|\overrightarrow{PF_1}| = 2\sqrt{3} + 2$, B 正确.
11. AD 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 (图略), 则 $A(0, 0, 0), P(0, 0, 2), C(2, 2, 0), E(0, 1, 1), F(1, 0, 1), D(0, 2, 0)$, 则 $\overrightarrow{EF} = (1, -1, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 0, 2), \overrightarrow{PC} = (2, 2, -2), \overrightarrow{EC} = (2, 1, -1)$. 因为 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 + 0 + 0 = 0, \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{PC} = 2 - 2 + 0 = 0$, 所以 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{PC}$, 即 $EF \perp AP, EF \perp PC$. 又 $AP \cap PC = P$, 所以 $EF \perp$ 平面 PAC , A 正确. 设平面 $EF C$ 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x, y, z)$, 则

$\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+y-z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 得 $m=(1,1,3)$. 因为 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot m=2 \neq 0$, B 不正确. 设点 A 到平面

EFC 的距离为 d , $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$, 则 $d=\frac{|\overrightarrow{AC} \cdot m|}{|m|}=\frac{2+2+0}{\sqrt{1+1+9}}=\frac{4\sqrt{11}}{11}$, D 正确. 设点 F 到直线 CD 的距离

为 h , $\overrightarrow{CF}=(-1,-2,1)$, $\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$, 则 $h^2=\overrightarrow{CF}^2-\left(\frac{\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}\right)^2=5$, 即 $h=\sqrt{5}$, C 不正确.

12. BC 由题意可得 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})$ ($\omega>0$), 则 $2\pi \leq 2\omega\pi-\frac{\pi}{3} < 3\pi$, 解得 $\frac{7}{6} \leq \omega < \frac{5}{3}$, 则 A 错误. 当 $x \in$

$[\frac{5\pi}{7}, \frac{11\pi}{10}]$ 时, $\omega x-\frac{\pi}{3} \in [\frac{5\omega\pi}{7}-\frac{\pi}{3}, \frac{11\omega\pi}{10}-\frac{\pi}{3}]$, 因为 $\frac{7}{6} \leq \omega < \frac{5}{3}$, 所以 $\frac{5\omega\pi}{7}-\frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{2}$, $\frac{11\omega\pi}{10}-\frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$, 所以

$[\frac{5\omega\pi}{7}-\frac{\pi}{3}, \frac{11\omega\pi}{10}-\frac{\pi}{3}] \subseteq [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, 所以 $f(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{7}, \frac{11\pi}{10}]$ 上单调递减, 则 B 正确. 由 $x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$, 得 $\omega x-$

$\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3}, 2\omega\pi-\frac{\pi}{3}]$. 因为 $\frac{7}{6} \leq \omega < \frac{5}{3}$, 所以 $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, $2\pi \leq 2\omega\pi-\frac{\pi}{3} < 3\pi$, 则 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

上最多可能有 3 个零点. 当 $\omega=\frac{37}{24}$ 时, 由 $x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$, 得 $\omega x-\frac{\pi}{3} \in [\frac{7\pi}{16}, \frac{11\pi}{4}]$, 则 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ 上有 3 个

零点, 则 C 正确. 当 $\omega=\frac{17}{12}$ 时, 由 $x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$, 得 $\omega x-\frac{\pi}{3} \in [-\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{2}]$, 则 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ 上有 3 个极值点,

则 D 错误.

13. $-\frac{1}{2}$ 因为 $(\lambda a+b) \perp a$, 所以 $\lambda a^2+a \cdot b=0$, 即 $9\lambda+3 \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6}=0$, 解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

14. $y=e^x; y=-e^x$ (注: 本题两空的答案不分先后顺序, 两空全答对得 5 分, 有错误的得 0 分) 当 $x>0$ 时, 曲

线 $y=e^x$ 在点 (x_1, e^{x_1}) 处的切线方程为 $y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$. 若该切线经过原点, 则 $-e^{x_1}=-x_1 e^{x_1}$, 解得 $x_1=1$, 此时切线方程为 $y=ex$. 当 $x<0$ 时, 同理可得满足题意的切线方程为 $y=-ex$.

15. $\frac{4}{5}$ 解法一: 由 $x^2+y^2-\frac{1}{2}xy=1$, 得 $\frac{5}{4}(x^2+y^2)-1=\frac{1}{4}(x+y)^2$. 因为 $\frac{1}{4}(x+y)^2 \geq 0$, 所以 $\frac{5}{4}(x^2+y^2)-1 \geq 0$, 解得 $x^2+y^2 \geq \frac{4}{5}$.

解法二: 由 $x^2+y^2-\frac{1}{2}xy=1$, 得 $(x-\frac{y}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}}{4}y)^2=1$.

$$\text{令} \begin{cases} x-\frac{y}{4}=\cos \theta, \\ \frac{\sqrt{15}}{4}y=\sin \theta, \end{cases} \text{ 则} \begin{cases} x=\frac{\sqrt{15}}{15}\sin \theta+\cos \theta, \\ y=\frac{4\sqrt{15}}{15}\sin \theta. \end{cases}$$

$$x^2+y^2=(\frac{\sqrt{15}}{15}\sin \theta+\cos \theta)^2+(\frac{4\sqrt{15}}{15}\sin \theta)^2=\frac{\sqrt{15}}{15}\sin 2\theta-\frac{1}{15}\cos 2\theta+\frac{16}{15}$$

$$=\frac{4}{15}\sin(2\theta-\varphi)+\frac{16}{15} \geq \frac{4}{5} \text{ (其中 } \tan \varphi=\frac{\sqrt{15}}{15}\text{)}.$$

16. $[\frac{3\sqrt{82}}{5}, 6]$ 由题意可知圆 C_1 的圆心为 $C_1(-2,1)$, 半径 $r_1=3$, 圆 C_2 的圆心为 $C_2(3,-1)$, 半径 $r_2=2$. 因

为 $|AB|=2\sqrt{2}$, 所以 $|C_2D|=\sqrt{2}$, 即点 D 在以 C_2 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上. 设直线 OD 的方程为 $y=kx$, 则

$$\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}} \leq \sqrt{2}, \text{ 即 } 7k^2+6k-1 \leq 0, \text{ 解得 } -1 \leq k \leq \frac{1}{7}. \text{ 当 } k=\frac{1}{7} \text{ 时, 直线 OD 被圆 } C_1 \text{ 截得的弦长最短, 此时圆}$$

心 C_1 到直线 OD 的距离 $d=\frac{|-2-7|}{\sqrt{50}}=\frac{9\sqrt{2}}{10}$, 则弦长为 $2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{9-\frac{81}{50}}=\frac{3\sqrt{82}}{5}$; 当 $k=-\frac{1}{2}$ 时, 直

线 OD 经过 C_1 , 此时直线 OD 被圆 C_1 截得的弦长最长, 最长的弦长是圆 C_1 的直径 6. 综上, 直线 OD 被圆

C_1 截得的弦长的取值范围是 $[\frac{3\sqrt{82}}{5}, 6]$.

17. 解: (1) 因为 $2a \sin B = \sqrt{2}b$, 所以 $2 \sin A \sin B = \sqrt{2} \sin B$ 2 分

因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4 分

故 $A = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$ 5 分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$.

由余弦定理可得 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$. 又因为 $b = \sqrt{2}c - \sqrt{3}$,

所以 $(\sqrt{2}c - \sqrt{3})^2 + c^2 - 6 = 2(\sqrt{2}c - \sqrt{3})c \cos \frac{\pi}{4}$,

解得 $c = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}$ (经检验, 不合题意, 舍去). 10 分

18. 解: (1) 因为 $a_1 = 2, a_2 = 8$, 所以 $a_2 = \lambda a_1 + 2 = 2\lambda + 2 = 8$, 解得 $\lambda = 3$ 3 分

可得 $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 即 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1), a_1 + 1 = 3$ 4 分

所以 $\{a_n + 1\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列,

故 $a_n + 1 = 3^n, a_n = 3^n - 1$ 6 分

(2) $n \cdot a_n = n \cdot 3^n - n$, 令 $b_n = n \cdot 3^n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n .

则 $B_n = 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + n \times 3^n$,

$3B_n = 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \dots + n \times 3^{n+1}$ 8 分

$-2B_n = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} = \frac{(1-2n)3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2}$ 9 分

所以 $B_n = \frac{(2n-1)3^{n+1}}{4} + \frac{3}{4}$ 10 分

$T_n = (3-1) + (2 \times 3^2 - 2) + (3 \times 3^3 - 3) + \dots + (n \times 3^n - n) = B_n - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2n-1)3^{n+1} - 2n^2 - 2n + 3}{4}$.

..... 12 分

19. (1) 证明: 取 A_1B_1 的中点 M , 连接 ME, MB 1 分

因为 E, F 分别是棱 A_1C_1, BC 的中点, 所以 $ME \parallel B_1C_1 \parallel BF, ME = \frac{1}{2} B_1C_1 = \frac{1}{2} BC = BF$.

所以四边形 $MEFB$ 为平行四边形, $EF \parallel MB$ 3 分

因为 $EF \not\subset$ 平面 $ABB_1A_1, MB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $EF \parallel$ 平面 ABB_1A_1 4 分

(2) 解: 取 AC 的中点 O , 连接 OB, OC_1 .

因为四边形 ACC_1A_1 是菱形, 所以 $CA = CC_1$.

因为 $\angle ACC_1 = 60^\circ$, 所以 $\triangle ACC_1$ 为等边三角形.

因为 O 为 AC 的中点, 所以 $C_1O \perp AC$.

因为平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $ACC_1A_1 \cap$ 平面 $ABC = AC, C_1O \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $C_1O \perp$ 平面 ABC .

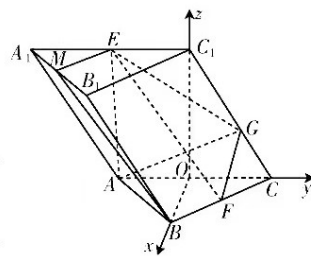
因为底面 ABC 是正三角形, 所以 $OB \perp AC$ 6 分

以 O 为原点, OB, OC, OC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $AC = 2$, 所以 $C_1O = \sqrt{3}$, 则 $B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), C_1(0, 0, \sqrt{3}), E(0, -1, \sqrt{3}), F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), G(0, \frac{2}{3},$

$\frac{\sqrt{3}}{3})$, 所以 $\overrightarrow{EF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{EG} = (0, \frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 8 分

设平面 EFG 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y - \sqrt{3}z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{EG} = \frac{5}{3}y - \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0. \end{cases}$



令 $y=1$, 则 $n=(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{5\sqrt{3}}{6})$ 9 分

因为 $OB \perp AC$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = AC$, $OB \subset$ 平面 ABC , 所以 $OB \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以平面 AEG 的一个法向量为 $\vec{OB}=(\sqrt{3}, 0, 0)$ 10 分

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{OB}, n \rangle| = \frac{|\vec{OB} \cdot n|}{|\vec{OB}| |n|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + 1 + (\frac{5\sqrt{3}}{6})^2}} = \frac{4\sqrt{53}}{53}.$$

故二面角 $A-EG-F$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{53}}{53}$ 12 分

20. 解: (1) X 可取 $1, 2, \dots, 8, 9$.

$$\text{则 } P(X=k) = \frac{A_8^{k-1}}{A_{10}^k} = \frac{1}{10}, k=1, 2, \dots, 8,$$

$$P(X=9) = \frac{A_9^8}{A_{10}^9} = \frac{1}{5}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } E(X) = \frac{1}{10} \times (1+2+\dots+8) + \frac{1}{5} \times 9 = \frac{27}{5}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 把采用方案乙, 直到能确定感染人员为止, 检测的次数记为 Y .

则 Y 可取 $2, 3, 4, 5$.

$$P(Y=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

$$P(Y=3) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5},$$

$$P(Y=4) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5},$$

$$P(Y=5) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{则 } E(Y) = \frac{1}{5} \times (2+3+4) + \frac{2}{5} \times 5 = \frac{19}{5}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设每次检测的费用均为 $m(m>0)$, 则方案甲的平均费用为 $\frac{27}{5}m$, 方案乙的平均费用为 $\frac{19}{5}m$.

因为 $\frac{27}{5}m > \frac{19}{5}m$, 所以应选择方案乙. 12 分

$$21. (1) \text{解: 由题可知 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{2b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{2}, \\ c=\sqrt{2}, \end{cases} \text{ 故 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{证明: ①依题可设 } l \text{ 的方程为 } x=ty+1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2). \text{ 联立方程组 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ x=ty+1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 整理得}$$

$$(t^2+2)y^2+2ty-3=0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{则 } y_1+y_2 = -\frac{2t}{t^2+2}, y_1y_2 = -\frac{3}{t^2+2}, \text{ 则 } ty_1y_2 = \frac{3}{2}(y_1+y_2). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}} = \frac{y_1(ty_2-1)}{y_2(ty_1+3)} = \frac{ty_1y_2-y_1}{ty_1y_2+3y_2} = \frac{-\frac{3}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

②设 $M(x_0, y_0)$, 则 $k_{AM} = k_1 = \frac{y_0}{x_0 + 2}$, $k_{BM} = k_2 = \frac{y_0}{x_0 - 2}$ 10 分

因为 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{\frac{y_0}{x_0 + 2}}{\frac{y_0}{x_0 - 2}} = \frac{1}{3}$, 解得 $x_0 = 4$ 11 分

故点 M 在定直线 $x = 4$ 上. 12 分

22. 解: (1) 由题意可得 $f'(x) = e^x - 2ax$.

令 $f'(x) = e^x - 2ax = 0$, 得 $2a = \frac{e^x}{x} (x > 0)$ 1 分

设 $g(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} (x > 0)$ 2 分

由 $0 < x < 1$, 得 $g'(x) < 0$, 由 $x > 1$, 得 $g'(x) > 0$,

则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) \geq g(1) = e$ 4 分

因为关于 x 的方程 $f'(x) = 0$ 有两个不同的正实根, 所以 $2a > e$, 则 $a > \frac{e}{2}$ 5 分

(2) 设 $h(x) = f(x) - (e-2)x - a = e^x - ax^2 - (e-2)x - a$,

因为当 $x \geq 0$ 时, $h(x) \geq 0$ 恒成立, 则至少满足 $h(0) = 1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$ 6 分

当 $a \leq 1$ 时, $h(x) = e^x - a(x^2 + 1) - (e-2)x \geq e^x - (x^2 + 1) - (e-2)x$ 7 分

设 $F(x) = e^x - (x^2 + 1) - (e-2)x$, 则 $F'(x) = e^x - 2x - e + 2$.

设 $G(x) = F'(x) = e^x - 2x - e + 2 (x \geq 0)$, $G'(x) = e^x - 2$, 8 分

由 $G'(x) > 0$, 得 $x > \ln 2$, 由 $G'(x) < 0$, 得 $0 \leq x < \ln 2$,

则 $G(x)$ 在 $[0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 即 $F'(x)$ 在 $[0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增. 9 分

因为 $F'(0) = 3 - e > 0$, $F'(\ln 2) = 4 - e - 2\ln 2 < 0$, $F'(1) = 0$,

所以存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$, 使 $F'(x_0) = 0$ 10 分

则 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $F(0) = F(1) = 0$, 所以当 $h(x) \geq 0$ 时, $x \geq 0$ 恒成立. 11 分

故 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线