

高 2023 届高三一诊模拟考试
数学试题（理科）

考试时间：120 分钟 总分：150 分

一. 选择题（每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求，把答案涂在答题卷上.）

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x \geq -1\}$, 则集合 $A \cap B$ 的元素个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 若复数 z 满足 $(z-1) \cdot i = 1-i$, 则 z 的虚部是 ()

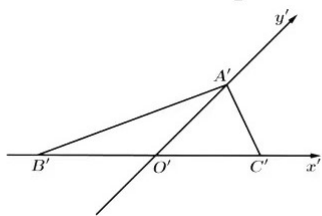
- A. 1 B. -1 C. i D. -i

3. “ $-1 < m < 7$ ”是“方程 $\frac{x^2}{m+1} + \frac{y^2}{7-m} = 1$ 表示椭圆”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知水平放置的 $\triangle ABC$ 是按“斜二测画法”得到如图所示的直观图，其中

$B'O' = C'O' = 1$, $A'O' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么原 $\triangle ABC$ 的面积是 ()



- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

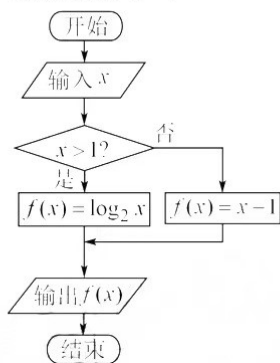
5. 已知圆台形的花盆的上、下底面的直径分别为 8 和 6, 该花盆的侧面展开图的扇环所对的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$, 则母线长为 ()

- A. 4 B. 8 C. 10 D. 16

6. 一种药品在病人血液中的量不低于 1500mg 时才有疗效, 如果用药前, 病人血液中该药品的量为 0mg, 用药后, 药在血液中以每小时 20% 的比例衰减. 现给某病人静脉注射了 3000mg 的此药品, 为了持续保持疗效, 则最长需要在多少小时后再次注射此药品 ($\lg 2 \approx 0.301$, 结果精确到 0.1) ()

- A. 2.7 B. 2.9 C. 3.1 D. 3.3

7. 如图所示的程序框图中, 若输出的函数值 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 内, 则输入的实数 x 的取值范围是 ()



- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 4]$ C. $[-1, 2]$ D. $[-1, 4]$

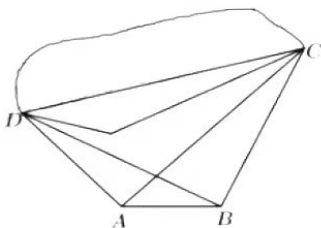
8. 记数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中一定成立的是 ()
- A. 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$ B. 若 $a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
 C. 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_4 + 2a_1 < 0$ D. 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$
9. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 4, 点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 在抛物线 C 上, 若 $(y_1 - 2y_2)(y_1 + 2y_2) = 48$, 则 $\frac{|MF|}{|NF|} = ()$.
- A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的一动点, M 为线段 DC 的中点, 则下列说法错误的是 ()
- A. 平面 PAM 内任意一条直线都不与 BC 平行
 B. 平面 PAB 和平面 PCM 的交线不与平面 $ABCD$ 平行
 C. 平面 PBC 内存在无数条直线与平面 PAM 平行
 D. 平面 PAM 和平面 PBC 的交线不与平面 $ABCD$ 平行
11. 从有大小和质地相同的 a 个红球和 b 个黄球的盒子中随机摸球, 下列说法正确的是 ()
- A. 每次摸出 1 个球, 摸出的球观察颜色后放回, 则每次摸到红球的概率均不同
 B. 每次摸出 1 个球, 摸出的球观察颜色后不放入, 则第二次摸到红球的概率为 $\frac{a-1}{a+b-1}$
 C. 每次摸出 1 个球, 摸出的球观察颜色后不放入, 则第一次摸到红球的条件下, 第二次摸到红球的概率为 $\frac{a(a-1)}{(a+b-1)(a+b)}$
 D. 每次摸出 1 个球, 摸出的球观察颜色后放回, 且约定每次摸到红球则积 2 分, 摸到黄球积 1 分. 连续摸 n 次后, 摸到红球的积分和 χ 的方差为 $\frac{4nab}{(a+b)^2}$
12. 已知 $a > b, c > d$, 且 $e^a - a = e^b - b = 1.01$, $\frac{e^c}{ce^c + 1} = \frac{e^d}{de^d + 1} = 0.99$, 则下列说法正确的个数有 () 个
- ① $0 < a < \frac{1}{2}$ ② $a + b < 0$ ③ $a + d < 0$ ④ $b + c > 0$
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 答案填在答题卷的横线上。)

13. $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2}\right)^7$ 的展开式中的常数项为_____.

14. 已知 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{9}{4-x} (0 < x < 4)$, 则 $f(x)$ 的最小值为_____.

15. 为了测量成都七中曦园 C, D 两点之间的距离, 如图, 在东西方向上选取相距 1 百米的 A, B 两点, 点 B 在点 A 的正东方向上, 且 A, B, C, D 四点在同一水平面上. 从点 A 处观测得点 C 在它的东北方向上, 点 D 在它的西北方向上; 从点 B 处观测得点 C 在它的北偏东 15° 方向上, 点 D 在它的北偏西 75° 方向上, 则 C, D 之间的距离为 _____ 百米.



16. 已知 $A(2\cos 15^\circ, 2\sin 15^\circ)$, $O(0, 0)$, 且 $|\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 2$, 则 $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ 的取值范围是 _____.

三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分, 每题 12 分.

17. 已知锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 所对的边分别记作 a, b, c , 满足 $a = 6$, $b = 5$, 且 $\sin A = \sin 2B$.

(1) 求边 c ;

(2) 若点 M, N 分别在边 AB 和 AC 上, 且 MN 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 求 MN 的最小值.

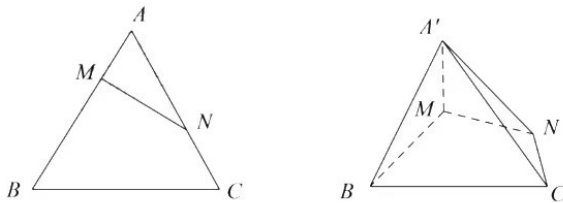
18. 新冠肺炎是近百年来人类遭遇的影响范围最广的全球性大流行病毒. 对前所未知、突如其来、来势汹汹的疫情天灾, 习近平总书记亲自指挥、亲自部署, 强调把人民生命安全和身体健康放在第一位. 明确坚决打赢疫情防控的人民战争、总体战、阻击战. 当前, 新冠肺炎疫情防控形势依然复杂严峻. 为普及传染病防治知识, 增强学生的疾病防范意识, 提高自身保护能力, 市团委在全市学生范围内, 组织了一次传染病及个人卫生相关知识有奖竞赛 (满分 100 分), 竞赛奖励规则如下: 得分在 $[70, 80)$ 内的学生获三等奖, 得分在 $[80, 90)$ 内的学生获二等奖, 得分在 $[90, 100]$ 内的学生获一等奖, 其它学生不得奖. 为了解学生对相关知识的掌握情况, 随机抽取了 100 名学生的竞赛成绩, 并以此为样本绘制了如图所示的频率分布表.

竞赛成绩	$[30, 40)$	$[40, 50)$	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$	$[90, 100]$
人数	6	12	18	34	16	8	6

(1) 从该样本中随机抽取 2 名学生的竞赛成绩, 求这 2 名学生恰有一名学生获奖的概率;

(2) 若该市所有参赛学生的成绩 X 近似地服从正态分布 $N(64, 225)$, 若从所有参赛学生中 (参赛学生人数特别多) 随机抽取 4 名学生进行座谈, 设其中竞赛成绩在 64 分以上的学生人数为 ξ , 求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图所示, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为6的等边三角形, 点 M, N 分别是边 AB, AC 的三等分点, 且 $AM = \frac{1}{3}AB, CN = \frac{1}{3}CA$, 沿 MN 将 $\triangle AMN$ 折起到 $\triangle A'MN$ 的位置, 使 $\angle A'MB = 90^\circ$.



- (1) 求证: $A'M \perp$ 平面 $MBCN$;
 (2) 在线段 BC 上是否存在点 D , 使平面 $A'ND$ 与平面 $A'MB$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$, 若存在, 设 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC} (\lambda > 0)$, 求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 且四个点 $A(2, \sqrt{3}), B(\frac{3}{2}, -\sqrt{3}), C(-2, \sqrt{3}), D(3, \frac{\sqrt{7}}{2})$ 中恰好有三个点在椭圆 C 上, O 为坐标原点.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 若直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且 $\angle AOB = 90^\circ$, 证明: 直线 l 与定圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切, 并求出 r 的值.

21. 设函数 $u(x) = \ln x - ax + a$, 函数 $v(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax \ln x + a (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求 $u(x)$ 的单调区间;
 (2) 若 $f(x) = v(x) - u(x)$, $g(x) = f'(x) = 0$ 有三个不同实根 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 试比较 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ 的大小关系, 并说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi)$, 点 $A(-3, 0)$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴为正半轴为极轴的建立极坐标系.

- (1) 求曲线 C 的极坐标方程;
 (2) 过坐标原点 O 任作直线 l 与曲线 C 交于 E, F 两点, 求 $|AE| \cdot |AF|$ 的值.

23. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}$, 不等式 $|x-1| - |x-2| \leq a+b+c$ 恒成立.

- (1) 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$;
 (2) 求证: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线