中学生标准学术能力诊断性测试
数学（理科）科目参考答案

一．选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	D	A	C	B	A	C	B	C	D	A

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2　　14. $\left[\dfrac{69}{29},3\right]$　　15. $\sqrt{3}+1$　　16. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题 12 分）

解：$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-1=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$.

$=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ …………………………4分

$\because$ $x\in\mathrm{R}$，由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ 得

$k\pi+\dfrac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$ ……… 6分

$\therefore$函数 $f(x)$ 的单调减区间 $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$　$k\in Z$. ………………6分

（2）$\because$ $f(A)=2$，即 $2\sin(2A+\dfrac{\pi}{6})=2$，$\because$角 A 为锐角，得 $A=\dfrac{\pi}{6}$， ……8分

又 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore C=\dfrac{7}{12}\pi$，$\therefore \sin C=\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ……10分

$\because AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

由正弦定理得 $BC=\dfrac{AB\sin A}{\sin C}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}=2$ ……… 12分

18.（本小题 12 分）

解：（1） 因为 $AB=AC$， D 是 BC 的中点，所以 $BC\perp AD$，

因为 $MN /\!/ BC$，所以 $MN\perp AD$ ， ………………2 分

因为 $AA_1\perp$ 平面ABC， $MN\subset$ 平面ABC，

所以 $AA_1 \perp MN$，

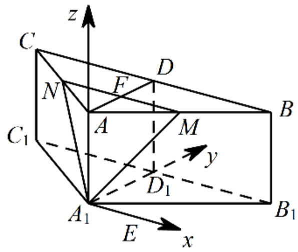
因为 $AD, AA_1 \subset 平面ADD_1A_1$，且 $AD \cap AA_1 = A$，　　　…………4 分

所以 $MN \perp 平面ADD_1A_1$　.　　　　　　　　……………………5 分

（2）　方法一：

设 $AA_1 = 1$　，

如图：过 A_1 作 $AE_1 \parallel BC$，建立以 A_1 为坐标原点，A_1E, A_1D_1, A_1A 分别为 x, y, z 轴的空间直角坐标系.



则 $A_1(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(\sqrt{3},1,1)$, $C(-\sqrt{3},1,1)$ ………………6 分

因为 F 是 AD 的中点，$MN \parallel BC$，　所以 M, N 分别为 AB，AC 的中点，则 $M(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，$N(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，

则 $\overrightarrow{A_1M} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，$\overrightarrow{A_1A} = (0,0,1)$，$\overrightarrow{NM} = (\sqrt{3},0,0)$，………………7 分

设平面 AA_1M 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$，

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1A} = 0, \end{cases}$　得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 0, \\ z = 0, \end{cases}$

令 $x = 1$，则 $y = -\sqrt{3}$，则 $\vec{m} = (1, -\sqrt{3}, 0)$　，…………………………9 分

同理设平面 A_1MN 的法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{NM} = 0, \end{cases}$　得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + c = 0, \\ \sqrt{3}a = 0, \end{cases}$

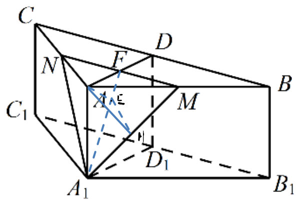
令 $b = 2$，则 $c = -1$，则 $\vec{n} = (0, 2, -1)$　，

则 $\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$，………………………………11 分

因为二面角 $A - A_1M - N$ 是锐二面角，

所以二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………12 分

方法二：连接 A_1F ,过点 A 作 $AE\perp A_1F$ 于点 E，过 E 作 $EH\perp A_1M$



由（1）知，$NM\perp AE$， 又$\because AE\perp A_1F$, $A_1F\cap NM=F$,

$\therefore AE\perp$ 面A_1NM，$\therefore AE\perp A_1M$

$\because A_1M\perp EH, A_1M\perp AE, EH\cap AE=E$,

$\therefore A_1M\perp$ 面AHE ,$\therefore AH\perp A_1M$ ……………………8 分

故 $\angle AHE$ 是二面角 $A-A_1M-N$ 的平面角 ……………………9 分

设 $AA_1=1$，则 $AM=AN=1$，$A_1M=A_1N=\sqrt{2}$,

故 $AH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $A_1F=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $AE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故 $\sin\angle AHE=\dfrac{AE}{AH}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

则 $\cos\angle AHE=\sqrt{1-\sin^2\angle AHE}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ……………………10 分

因为二面角 $A-A_1M-N$ 是锐二面角，

所以二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………12 分

19. （本小题 12 分）

解: (1)要使选择方案二比选择方案一更优惠,则需要至少摸出 1 个幸运球,
设顾客不打折即三次没摸出幸运球为事件 A,则

$P(A)=\frac{2\times2\times3}{4\times4\times4}=\frac{3}{16}$, ……………………2 分

故所求概率 $P=1-P(A)P(A)=1-\left(\frac{3}{16}\right)^2=\frac{247}{256}$. ……………5 分

(2)若选择方案一,则需付款 $10-0.6=9.4$(万元). ……………6 分

若选择方案二,设付款金额为 X 万元,则 X 可能的取值为 6,7,8,10, ………7 分

$P(X=6)=\frac{2\times2\times1}{4\times4\times4}=\frac{1}{16}$, $P(X=7)=\frac{2\times2\times3+2\times2\times1+2\times2\times1}{4\times4\times4}=\frac{5}{16}$,

$P(X=8)=\frac{2\times2\times3+2\times2\times3+2\times2\times1}{4\times4\times4}=\frac{7}{16}$, $P(X=10)=\frac{3}{16}$. ……………10 分

故 X 的分布列为

X	6	7	8	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}$

……………11 分

所以 $E(X)=6\times\frac{1}{16}+7\times\frac{5}{16}+8\times\frac{7}{16}+10\times\frac{3}{16}=7.937\ 5$(万元)<9.4(万元),

所以选择第二种方案划算. ……………12 分

20.（本小题 12 分）

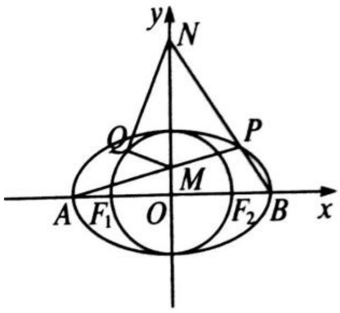
解:(1)设点 $D(x,y)$,则 $k_{DA}\cdot k_{DB}=\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$, ………2 分

即 $2y^2+x^2=4$,整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,其中 $x\neq\pm2$. ……………4 分

(2)设直线 AP 为 $y=k(x+2)$,联立椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 得

$$(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$$

根据韦达定理得 $x_p\cdot x_A=\frac{8k^2-4}{1+2k^2}$,其中 $x_A=-2$,所以 $x_p=\frac{2-4k^2}{1+2k^2}$, ……………5 分



将 x_p 代入直线 AP 得到 $y_p=\frac{4k}{1+2k^2}$.

由于 PQ 平行于 x 轴,所以 $y_Q=y_p=\frac{4k}{1+2k^2}$.

在直线 AP 为 $y=k(x+2)$ 中令 $x=0$ 得 $M(0,2k)$.

根据条件知可设直线 BP 为 $y=-\frac{1}{2k}(x-2)$,令 $x=0$ 得 $N(0,\frac{1}{k})$.

……………8 分

设 $Q(x_Q,y_Q)$,则 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=(x_Q,y_Q-2k)\cdot\left(x_Q,y_Q-\frac{1}{k}\right)$ ……………10 分

$=x_Q^2+y_Q^2-\left(\frac{1}{k}+2k\right)y_Q+2=2-\left(\frac{1}{k}+2k\right)\frac{4k}{1+2k^2}+2=0$. ……………11 分

所以 $\angle MQN=\frac{\pi}{2}$. ……………12 分

21.（本小题 12 分）

解：（1）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$， $f'\left(x\right)=\dfrac{m\left(1-\ln x\right)}{x^2}$， ……1 分

因为 $f\left(x\right)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$，

所以 $\begin{cases} f'(1)=m=1 \\ f(1)=\dfrac{m\ln 1}{1}+n=0 \end{cases}$. 解得 $m=1,n=0$. ……3 分

所以 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$. 故 $f'\left(x\right)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'\left(x\right)=0$，得 $x=e$， ……………4 分

当 $0<x<e$ 时， $f'\left(x\right)>0$， $f\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x>e$ 时， $f'\left(x\right)<0$， $f\left(x\right)$ 单调递减.

所以当 $x=e$ 时， $f\left(x\right)$ 取得最大值 $f\left(e\right)=\dfrac{1}{e}$. …………5 分

（2）$\because g\left(x\right)=x^2\left[f(x)-\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{2}\right]=x\ln x-\dfrac{ax^2}{2}-x$，

$\therefore g'\left(x\right)=\ln x-ax=x(\dfrac{\ln x}{x}-a)$， …………6 分

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$，由（1）知道 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $\left(0,e\right)$ 上是增函数，

故 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 在 $\left(0,e\right)$ 上是增函数，

又 $\because -e<a<\dfrac{1}{e}$， $\therefore h(e)=\dfrac{1}{e}-a>0, h(\dfrac{1}{e})=-e-a<0,$

因此存在唯一的 $t\in\left(\dfrac{1}{e},e\right)$，使得 $h(t)=0$，也就是 $g'(t)=0$，即 $\ln t=at$

当 $x\in\left(0,t\right)$ 时， $h(x)<h(t)=0$，所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(t,e\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)$ 的最小值为 $b=t\ln t-\dfrac{a}{2}t^2-t$

$=\dfrac{t\ln t}{2}-t$，令 $s(t)=\dfrac{t\ln t}{2}-t$，因为 $h'(t)=\dfrac{\ln t-1}{2}<0$，所以 $h(t)$ 在 $\left(\dfrac{1}{e},e\right)$ 单调递减，从而

$h(t)\in\left(-\dfrac{e}{2},-\dfrac{3}{2e}\right)$，即 b 的取值范围是 $(-\dfrac{e}{2},-\dfrac{3}{2e})$ …………12 分

22.（本小题 10 分）

（1）由曲线 C_1 的参数方程，消去参数 t，可得 C_1 的普通方程为：$x-y+m=0$．……2 分

由曲线 C_2 的极坐标方程得 $3\rho^2-2\rho^2\cos^2\theta=3$，$\theta\in[0,\pi]$，

∴曲线 C_2 的直角坐标方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1(0\le y\le 1)$…………4 分

（2）设曲线 C_2 上任意一点 P 为 $(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha),\alpha\in[0,\pi]$，…………5 分

则点 P 到曲线 C_1 的距离为 $d=\dfrac{|\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha+m|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|2\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})+m|}{\sqrt{2}}$．……7 分

∵ $\alpha\in[0,\pi]$　∴ $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\in[-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$，$2\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\in[-2,\sqrt{3}]$，…………8 分

当 $m+\sqrt{3}<0$ 时，$m+\sqrt{3}=-4$，即 $m=-4-\sqrt{3}$；

当 $m-2>0$ 时，$m-2=4$，即 $m=6$．

∴ $m=-4-\sqrt{3}$ 或 $m=6$．…………10 分

23.（本小题 10 分）

（1）当 $a=2$ 时，原不等式可化为 $|3x-1|+|x-2|\ge 3$．…………1 分

①当 $x\le\dfrac{1}{3}$ 时，原不等式可化为 $-3x+1+2-x\ge 3$，解得 $x\le 0$，所以 $x\le 0$；……2 分

②当 $\dfrac{1}{3}<x<2$ 时，原不等式可化为 $3x-1+2-x\ge 3$，解得 $x\ge 1$，所以 $1\le x<2$；…3 分

③当 $x\ge 2$ 时，原不等式可化为 $3x-1-2+x\ge 3$，解得 $x\ge\dfrac{3}{2}$，所以 $x\ge 2$．……4 分

综上所述，当 $a=2$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|\,x\le 0或x\ge 1\}$．……5 分

（2）不等式 $|x-\dfrac{1}{3}|+f(x)\le x$ 可化为 $|3x-1|+|x-a|\le 3x$，………6 分

依题意不等式 $|3x-1|+|x-a|\le 3x$ 在 $[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$ 恒成立，

所以 $3x-1+|x-a|\le 3x$，即 $|x-a|\le 1$，………8 分

即 $a-1\le x\le a+1$，所以 $\begin{cases}a-1\le\dfrac{1}{3}\\ a+1\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$．

解得$-\frac{1}{2}\le a\le\frac{4}{3}$，故所求实数$a$的取值范围是$[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}]$．………10 分