# 2024届新高三开学适应性考试

## 数学 试题 参考答案：

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | D | B | C | A | D | A | C |

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | ABD | ACD | AD | ABC |

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13．$\frac{\sqrt{13}}{3}/\frac{1}{3}\sqrt{13}$　　14．2　　15．$(1,+\infty)$　　16．$\frac{18\sqrt{6}+6\sqrt{15}}{7}$

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17．

【解析】（1）因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

所以$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}(AB+AC)\cdot AD\sin\frac{\pi}{3}$，

得:$3AC=2(3+AC)$，

解得$AC=6$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

（2）设$\angle BAC=2\alpha$，$AB=c,AC=b$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$得

$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin2\alpha=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha+\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\alpha$，

即$bc\cos\alpha=b+c$，

所以$\cos\alpha=\frac{b+c}{bc}$，

又在$\triangle ABD$中$\cos\alpha=\frac{4+c^2-9}{4c}=\frac{c^2-5}{4c}$，

所以$\frac{c^2-5}{4c}=\frac{b+c}{bc}$，

得$b=\frac{4}{c-\frac{9}{c}}$，

因为$\cos\alpha=\frac{c^2-5}{4c}\in(0,1)$且$b>0$，

得$3<c<5$，

则$c-\frac{9}{c}\in\left(0,\frac{16}{5}\right)$，

所以$b>\frac{5}{4}$，

即边$AC$的取值范围为$\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$.

18．【解析】（1）由$5S_2=11S_1$，得$5(a_1+a_2)=11a_1$，

所以$6a_1=5a_2$，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{5}$，

由$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2-a_{n+1}$，得$\frac{a_2}{a_1}=2-a_2$，

所以$a_1=\frac{2}{3}$，$a_2=\frac{4}{5}$.

证明如下：

由$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2-a_{n+1}$，得$a_{n+1}=2a_n-a_{n+1}a_n$，

所以$a_{n+1}(a_n+1)=2a_n$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{2a_n}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_n}$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，

因为$a_1=\frac{2}{3}$，所以$\frac{1}{a_n}-1\neq0$，$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{1}{2}$，

即数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是以$\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}$为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

（2）由（1）知，$\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$a_n=\frac{2^n}{2^n+1}$，$a_n=\frac{2^n+1-1}{2^n+1}=1-\frac{1}{2^n+1}$，

$$S_n=1-\frac{1}{2+1}+1-\frac{1}{2^2+1}+1-\frac{1}{2^3+1}+\cdots+1-\frac{1}{2^n+1}$$

$$=n-\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}\right)，$$

因为$2^n<2^n+1<2^{n+1}$，所以$\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$，

于是$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，

其中$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$，

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

于是$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}<1-\frac{1}{2^n}$，

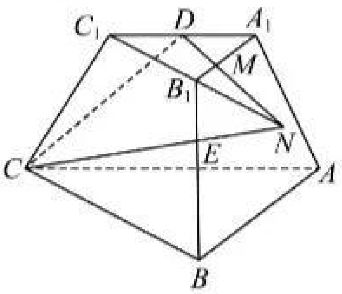
所以$n-1+\frac{1}{2^n}<n-\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}\right)<n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$.

即$n-1+\frac{1}{2^n}<S_n<n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$.

19．【解析】（1）①作图步骤：延长$CE,CB_1$，使其相交于$N$，连接$DN$，则可得

$DN\cap A_1B_1=M$；

作图如下：



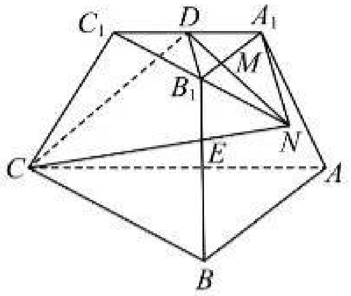

作图理由：在平面$CBB_1C_1$中，显然$CE$与$C_1B_1$不平行，延长相交于$N$，

由$N\in CE$，则$N\in$平面$CED$，由$D\in$平面$CED$，则$DN\subset$平面$CED$，

由$N\in B_1C_1$，$D\in A_1C_1$，则$DN\subset$平面$A_1B_1C_1$，可得$ND\cap A_1B_1=M$

故$A_1B_1\cap$平面$CDE=M$．

②连接$DB_1$、$A_1N$，如下图所示：



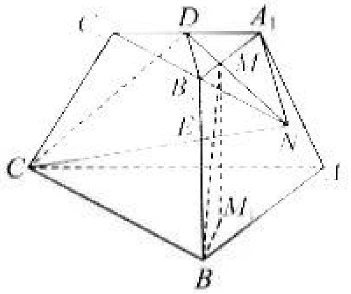

在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC//B_1C_1$，即 $B_1N//BC$，易知 $BCE$ $B_1NE$，

则 $\frac{B_1N}{BC}=\frac{B_1E}{BE}$，由 $BE=2EB_1$，且 $BC=6$，则 $B_1N=3$，显然 $B_1C_1=B_1N=3$，

由 $B_1, D$ 分别为 $C_1N, C_1A_1$ 的中点，则 $DB_1=\frac{1}{2}A_1N$，且 $B_1D//NA_1$，

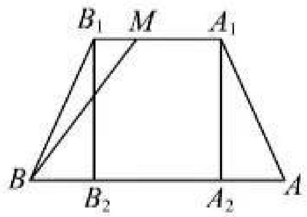
易知 $B_1DM$ $A_1NM$，故 $\frac{A_1M}{MB_1}=\frac{A_1N}{DB_1}=2$.

（2）由题意，过 $M$ 作平面 $ABC$ 的垂线，垂足为 $M_1$，并连接 $BM_1$，如下图所示：




由（1）可知：$\frac{A_1M}{MB_1}=2$ 且 $A_1B_1=B_1C_1=3$，则 $B_1M=1$，由 [illegible]，

在侧面 $AA_1B_1B$ 中，过 $B_1, A_1$ 分别作 $AB$ 的垂线，垂足分别为 $B_2, A_2$，如下图所示：




易知 $BB_2=\frac{1}{2}(AB-A_2B_2)=\frac{1}{2}(AB-A_1B_1)=\frac{3}{2}$, $\cos\angle B_1BA=\frac{BB_2}{BB_1}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\angle BB_1A_1=-\frac{1}{2}$，

在 $\triangle BB_1M$ 中，$BM^2=BB_1^2+B_1M^2-2\times BB_1\times B_1M\times\cos\angle BB_1A_1=13$，则 $BM=\sqrt{13}$，

棱台的高 $MM_1=\sqrt{3^2-\left[\frac{2}{3}\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2}=\sqrt{6}$，

由图可知直线 $BM$ 与平面 $ABC$ 所成角为 $\angle MBM_1$，

因为 $MM_1\perp$ 平面 $ABC$ ，且 $M_1B\subset$ 平面 $ABC$ ，所以 $M_1B\perp MM_1$，

所以 $\sin\angle MBM_1=\dfrac{MM_1}{BM}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{78}}{13}$.

20．

【解析】（1）由题意，$a=2$，$2c=2$，$c=1$，$\therefore b^2=a^2-c^2=3$．

$\therefore$ 椭圆 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（2）设 $P\left(x_0,y_0\right)$，$D\left(x_1,y_1\right)$，$E\left(x_2,y_2\right)$，则 $3x_0^2+4y_0^2=12$．①

当直线 $PN$ 的斜率存在时，其方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-\frac{4}{3}}\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$，代入椭圆 $C$ 的方程，整理得

$$\left[3\left(x_0-\frac{4}{3}\right)^2+4y_0^2\right]x^2-\frac{32y_0^2}{3}x+\frac{64y_0^2}{9}-12\left(x_0-\frac{4}{3}\right)^2=0.$$

$$\therefore x_0+x_1=\frac{\frac{32}{3}y_0^2}{3\left(x_0-\frac{4}{3}\right)^2+4y_0^2}=\frac{32y_0^2}{52-24x_0}=\frac{4y_0^2}{6.5-3x_0}.$$

直线 $PM$ 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-3}(x-3)$，代入椭圆 $C$ 的方程，整理得

$$\left[3\left(x_0-3\right)^2+4y_0^2\right]x^2-24y_0^2x+36y_0^2-12\left(x_0-3\right)^2=0.$$

$$\therefore x_0+x_2=\frac{24y_0^2}{3\left(x_0-3\right)^2+4y_0^2}=\frac{24y_0^2}{39-18x_0}=\frac{4y_0^2}{6.5-3x_0}.$$

因此 $x_1=x_2$，此时 $DE\perp x$ 轴，即直线 $DE$ 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$．

②当直线 $PN$ 的斜率不存在时，其方程为 $x=\dfrac{4}{3}$，此时 $x_0=\dfrac{4}{3}$．

由①知 $x_0+x_2=\dfrac{12-3x_0^2}{6.5-3x_0}$，$\therefore x_2=\dfrac{12-6.5x_0}{6.5-3x_0}=\dfrac{12-\frac{13}{2}\times\frac{4}{3}}{\frac{13}{2}-3\times\frac{4}{3}}=\dfrac{4}{3}=x_0$．

$\therefore x_1=x_2=\dfrac{4}{3}$，此时 $DE\perp x$ 轴，即直线 $DE$ 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$．

综上所述，直线 $DE$ 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$．

21．

【解析】（1）若 $p=0.5$，$n=2$，则$Y$ 的所有取值为 0，200，400，

记一艘该型号飞艇第 次执行科考任务能成功返航为事件 $A_i$，获得价值为 200 万元的科考数

据为事件 $B_i$，$(i=1,2)$.则 $P(Y=0)=P\left(\overline{A_1}\right)+P\left(A_1\overline{B_1}\,\overline{A_2}\right)+P\left(A_1\overline{B_1}A_2\overline{B_2}\right)$

$=1-p+p\cdot0.8\cdot(1-p)+p\cdot0.8\cdot p\cdot0.8=0.86$，

$P(Y=200)=P\left(A_1B_1A_2\overline{B_2}\right)+P\left(A_1B_1\overline{A_2}\right)+P\left(A_1\overline{B_1}A_2B_2\right)$

$=p\cdot0.2\cdot p\cdot0.8+p\cdot0.2\cdot(1-p)+p\cdot0.8\cdot p\cdot0.2=0.13$，

$P(Y=400)=P(A_1B_1A_2B_2)=p\cdot0.2\cdot p\cdot0.2=0.01$

所以$Y$ 的分布列为

| $Y$ | 0 | 200 | 400 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.86 | 0.13 | 0.01 |

（2）$Z_i$ 取值表示的意义如下：若一艘该型号飞艇能执行第 次科考任务且在此次任务中获

得价值 200 万元的科考数据，则$Z_i=200$，否则$Z_i=0$，$(i=1,2,3,\cdots,n)$.

因为$Z_i$ 的分布列为

| $Z_i$ | 0 | 200 |
|---|---|---|
| $P$ | $1-0.2p^i$ | $0.2p^i$ |

所以$E(Z_i)=0\times\left(1-0.2p^i\right)+200\times0.2p^i=40p^i$

因为$Y=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$，

所以$E(Y)=E(Z_1)+E(Z_2)+\cdots+E(Z_n)=40\left(p+p^2+\cdots+p^n\right)=\dfrac{40p\left(1-p^n\right)}{1-p}$

22．【解析】（1）解：由函数 $f(x)=x\ln x$，可得 $f'(x)=1+\ln x(x>0)$，

令 $f'(x)>0$，即$1+\ln x>0$，解得$x>e^{-1}$；

令 $f'(x)<0$，即$1+\ln x<0$，解得$0<x<e^{-1}$，

所以 $f(x)$ 的减区间是 $\left(0,e^{-1}\right)$，增区间是 $\left(e^{-1},+\infty\right)$.

（2）证明：当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0, f(1)=0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，

因为 $x_1<x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，结合 $f(x)$ 在 $\left(0,e^{-1}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{-1},+\infty\right)$ 上单调递增可得

$0<x_1<e^{-1}<x_2<1$，设 $g(x)=f(x)+x\left(0<x<e^{-1}\right)$，则 $g(x)=x(1+\ln x)<0$，

所以 $f(x)<-x$，从而 $f(x_1)<-x_1$，

又因为 $f(x_1)=a$，所以 $a<-x_1$，故 $-x_1>a$ ①，

设 $h(x)=f(x)-\frac{1}{e-1}(x-1)\left(e^{-1}<x<1\right)$，则 $h'(x)=1+\ln x-\frac{1}{e-1}=\ln x+\frac{e-2}{e-1}$，

令 $h'(x)>0$，可得 $e^{-\frac{e-2}{e-1}}<x<1$；令 $h'(x)<0$，可得 $e^{-1}<x<e^{-\frac{e-2}{e-1}}$，

从而 $h(x)$ 在 $\left(e^{-1},e^{-\frac{e-2}{e-1}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{-\frac{e-2}{e-1}},1\right)$ 上单调递增，

又由 [illegible]，所以 $h(x)<0$，故 $h(x_2)=f(x_2)-\frac{1}{e-1}(x_2-1)<0$，

所以 $f(x_2)<\frac{1}{e-1}$[illegible].

因为 $f(x_2)=a$，所以 $a<\frac{1}{e-1}(x_2-1)$，故 $x_2>1+a$[illegible] ②，

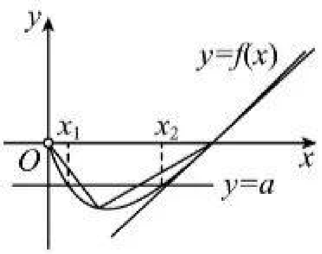
将①②两式相加可得 $x_2-x_1>ae+1$，

设 $u(x)=f(x)-(x-1)(0<x<1)$，则 $u'(x)=\ln x<0$，所以 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

又 $u(1)=0$，所以 $u(x)>0$，从而 $f(x)>x-1$，所以 $f(x_2)>x_2-1$，

$f(x_2)=a$，所以 $a>x_2-1$，故 $x_2<a+1$，

又因为 $x_1>0$，所以 $x_2-x_1<x_2<a+1$，
综上所述，$ae+1<x_2-x_1<a+1$.



# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。