2023年辽宁省教研联盟高三第一次调研测试

数学试题　参考答案

一、选择题

1.【答案】 B

解：

$A\cup B=\{x|-1<x\leqslant 2 或 x>0\}=\{x|x>-1\}$,选 B.

2.【答案】 D

解：

直于同一条直线的两个不同平面平行,选 D.

3.【答案】 A

解：

画每个函数图像可知,$y=x^{-2}$是偶函数,且在区间$(-\infty,0)$单调递增,选 A.

4.【答案】 C

解法1:设 MN 中点为 P,则 $OP\perp MN$,所以

$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PO})\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{MN}^2}{2}+0=2$,选 C.

解法2:

$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MN}=|\overrightarrow{MO}||\overrightarrow{MN}|\cos\angle OMN=|\overrightarrow{MN}|(|\overrightarrow{MO}|\cos\angle OMN)=|\overrightarrow{MN}|\dfrac{|\overrightarrow{MN}|}{2}=2$,选 C.

解法3:

设 MN 中点为 P,以$\overrightarrow{MN}$为 x 轴正方向,线段 MN 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系 xPy,则 $\overrightarrow{MN}=(2,0)$,$\overrightarrow{MO}=(1,m)$,因此$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MN}=2$,选 C.

5.【答案】 B

解：

$x=-1$ 代入 $f(x)-x=2f(2-x)$ 可得 $f(-1)+1=2f(3)$　　①.

$x=3$ 代入 $f(x)-x=2f(2-x)$ 可得 $f(3)-3=2f(-1)$　　②.

联立①②可得 $f(3)=-\dfrac{1}{3}$,选 B.

6.【答案】 D

解：

因为$\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{\pi}{2}-(-\dfrac{3\pi}{10})$,所以 $\sin\dfrac{4\pi}{5}=\sin(-\dfrac{3\pi}{10})$,$\cos\dfrac{4\pi}{5}=\cos(-\dfrac{3\pi}{10})$,因此 α 的最小正值为 $2\pi-\dfrac{3\pi}{10}=\dfrac{17\pi}{10}$,选 D.

7.【答案】 A

解法 1:

$P=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$,选 A.

解法 2:

摸球三次结果的所有可能情形有 $A_5^3=60$ 种,这三次符合题意摸球可以分为两类,第一类第一次第三次摸到红球,可能情形有 $A_2^2C_3^1=6$ 种,第二次第三次摸到红球,可能情形有 $A_2^2C_3^1=6$ 种,于是摸球三次就停止摸球的概率为 $P=\frac{6+6}{60}=\frac{1}{5}$,选 A.

8.【答案】 A

解:

设 $f(x)=\frac{\pi}{2}\sin x+\frac{\pi}{2}\tan x-\pi x$,则当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f'(x)=\frac{\pi}{2}(\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2)$.

因为 $\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\geqslant\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$,所以 $f'(x)\geqslant\frac{\pi}{2}(\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-2)>0$,于是 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增,

所以 $f(1)>f(0)=0$,可得 $a>b$.

设 $g(x)=\ln x^2+\frac{1}{x}-x$,则当 $x>0$ 时,$g'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$,所以 $g(\pi)<g(1)=0$,

可得 $b>c$.

综上,$a>b>c$,选 A.

二、选择题

9.【答案】 ACD

解:

因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 $P(X\leqslant 2)=0.5$,所以 $\mu=2$,故 $E(X)=\mu=2$,$D(x)=\sigma^2$,选项 A 正确,选项 B 错误.

因为 $Y\sim B(3,p)$,所以 $E(Y)=3p$,由 $3p=2$ 可得 $p=\frac{2}{3}$,选项 C 正确.

$D(3Y)=9D(Y)=9\times 3\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})=6$,选项 D 正确.

综上,选 ACD.

10.【答案】 BC

解:

由 $a_2<-a_{11}<a_1$ 可得 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$,且 $a_2+a_{11}<0$,$a_1+a_{11}>0$,因此 $a_6>a_7$,

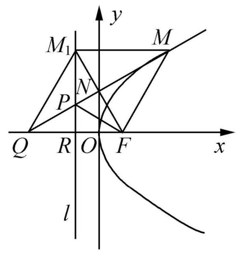
且 $S_{12}<0$,$S_{11}>0$,从而 $S_{15}<0$,$S_{10}>0$,选项 A 错误,选项 B 正确,选项 C 正确.

由 $a_1+a_{11}>0$ 可得 $a_6>0$,由 $a_2+a_{11}<0$,因为 $a_{12}<a_{11}$,所以 $a_7=\frac{a_2+a_{12}}{2}=\frac{a_2+a_{11}}{2}<0$,

因为 $\{a_n\}$ 单调递减,所以 $S_n\leqslant S_6$,$S_6\neq S_5$,选项 D 错误.

综上,选 BC.

11.【答案】 BCD



解:

设 l 与 x 轴交点为 R,则未必是 QF 的中点,未必有 $|PF|=|PQ|$,因此选项 A 错误.

设 $M\left(\frac{y_0^2}{2p},y_0\right)$,可知 m 斜率 k 存在,可设 $m: y-y_0=k\left(x-\frac{y_0^2}{2p}\right)$,

将 $x=\frac{y^2}{2p}$ 代入可得 $\frac{ky^2}{2p}-y+y_0-\frac{ky_0^2}{2p}=0$,由 $\Delta=0$,可得 $k=\frac{p}{y_0}$,

因此 $m: y=\frac{p}{y_0}x+\frac{y_0}{2}$.

于是 $N\left(0,\frac{y_0}{2}\right)$,因为 $M_1\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$,$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以 N 为 M_1F 中点,选项 B 正确.

因为 $|M_1M|=|MF|$,所以 MQ 是 M_1F 的垂直平分线,而 $M_1M/\!/x$ 轴,

所以四边形 MM_1QF 是菱形,选项 C 正确.

$\triangle MM_1P\cong\triangle MFP$,由 $\angle MPF=60°$,可得 $\angle M_1MF=60°$,所以 $|M_1Q|=|MF|=|M_1F|$.

因为 $\angle M_1MR=60°$,所以 $|M_1F|=2|RF|=2p$,选项 D 正确.

综上,选 BCD.

【关于 $m: y=\frac{p}{y_0}x+\frac{y_0}{2}$ 导数得出:

对等式 $y^2=2px$ 两边对 x 求导数,可得 $2yy'=2p$,从而 $y'=\frac{p}{y}$,设 $M\left(\frac{y_0^2}{2p},y_0\right)$,

可得 $m: y-y_0=\frac{p}{y_0}\left(x-\frac{y_0^2}{2p}\right)$,即 $y=\frac{p}{y_0}x+\frac{y_0}{2}$.】

【例子】对于函数 $f(x)=x^x$,$x>0$,我们有

$$\ln f(x)=x\ln x,$$

两边对 x 求导数可得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1.$$

从而

$$f'(x)=x^x(\ln x+1).$$

…….

12.【答案】 BD

解:

因为 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=a+b>0$,选项 A 错误.

$\frac{9}{a}-\frac{1}{b}=\left(\frac{9}{a}+\frac{1}{-b}\right)(a+(-b))=10-\left(\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}\right)\leqslant 10-2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$,当且仅当 $a=\frac{3}{2}$,

$b=\frac{1}{2}$ 时,取等号,选项 B 正确.

因为 $a\neq -b$,所以$\dfrac{a^2+b^2}{2}>\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,可得 $a^2+b^2>\dfrac{1}{2}$,选项 C 错误.

设$f(x)=2^x-2^{-x}$,则 D 等价于 $2^a-2^{-a}<2^b-2^{-b}$,等价于 $f(a)<f(b)$. 因为 $f(a)$ 单调递增,$a-b=1>0$,所以 $a>b$,所以 $f(a)<f(b)$,选项 D 正确.

综上,选 BD.

三、填空题

13.【答案】 1

解:

由题设 $z=\pm i$,故$\dfrac{2}{z-1}=1\mp i$,实部为 1.

14. 解法 1:

$\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle ADB$ 面积与 $\triangle ADC$ 面积之和,所以

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot AB\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot AC\sin\frac{\pi}{2}.$$

即

$$\sqrt{3}AB\cdot AC=AB+2AC.$$

于是

$$\frac{1}{AC}+\frac{2}{AB}=\sqrt{3}.$$

解法 2:

直角 $\triangle ADC$ 中,因为 $AD=1$,所以

$$\frac{1}{AC}=AD\tan C=\tan C.$$

因为 $A=\dfrac{2\pi}{3}$,所以 $B=\dfrac{\pi}{3}-C$. 在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理可得

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)},$$

从而

$$AB=\frac{AC\sin C}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)}=\frac{\cos C}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)}.$$

所以

$$\frac{2}{AB}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)}{\cos C}=\frac{\sqrt{3}\cos C-\sin C}{\cos C}=\sqrt{3}-\tan C.$$

于是

$$\frac{1}{AC}+\frac{2}{AB}=\sqrt{3}.$$

15.【答案】 18π

解：

设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，CD 中点为 E，则 $BE=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，$OE=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

设$\triangle BCD$ 中心为 F，由对称性可知球 O 截平面 BCD 所得圆圆心 O_1 在 BE 上，且 O_1 为 BF 的中点，所以 $BE=\frac{3O_1E}{2}$.

因为 $O_1E=\sqrt{3}$，由$\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$可得 $a=3$.

于是球 O 的半径 $OE=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，球 O 的表面积为 18π.

16.【答案】 $\sqrt{3}$

解法 1：

因为 $|\overrightarrow{FN}|=b$，所以 FN 垂直于渐近线，所以 C 的离心率 $e=\frac{1}{\sin\angle OFN}$.

因为$\overrightarrow{MF}+3\overrightarrow{FN}=0$，所以，$|FM|=3b$.

过作另一条渐近线的垂线，垂足为 P，则 $|FP|=b$，在直角$\triangle MFP$ 中，$\cos\angle MFP=\frac{1}{3}$.

因为$\angle MFP=2\angle OFN$，因为 $\cos\angle MFP=1-2\sin^2\angle OFN$，所以 $\sin\angle OFN=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

因此 C 的离心率为$\sqrt{3}$.

解法 2：

因为 $|\overrightarrow{FN}|=b$，所以 FN 垂直于渐近线，所以 $|NM|=2b$，$|NO|=a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMN$ 中，$\tan(180^\circ-2\angle NOF)=\frac{|NM|}{|NO|}=\frac{2b}{a}=2\tan\angle NOF$，可得 $\tan\angle NOF=2$，

从而 $\cos\angle NOF=\frac{1}{3}$，$C$ 的离心率 $e=\frac{1}{\cos\angle NOF}=\sqrt{3}$.

四、解答题

17. 解：

(1) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}\cos 2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$. $b>a>c$

因为 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 周期为 π.

由$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，可得 $\omega=1$.

……………………………（5 分）

(2) 由 (1) 知，$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，可得 $k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $0<x<\pi$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{3\pi}{8}\right)$ 和 $\left(\frac{7\pi}{8},\pi\right)$.

……………………………（10 分）

18. 解：

（1）由题意 $y=a\lambda+b$ 的线性相关系数的相关系数 $r_1=\frac{5.55}{5.76}\approx 0.963$.

$y=c\sqrt{x}+d$ 的相关系数 $r_2=\frac{6.32}{6.61}\approx 0.956$.

所以 $1>r_1>r_2>0$，因此模型①拟合效果更好.

……………………………（6 分）

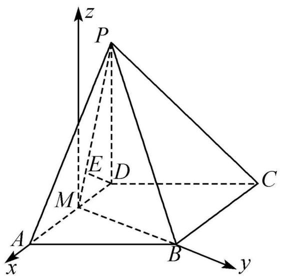
（2）根据（1）的判断结果，计算 a 与 b

由参考数据 $a=\frac{5.55}{2.20}\approx 2.52$，所以 $b=3.55-2.52\times 1.80\approx -1.0$.

于是 y 关于 x 的回归方程①为 $y=2.5\ln x-1.0$.

……………………………（12 分）

19. 解：



（1）因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PD\perp BM$.
在平面 PDA 内过 D 做 $DE\perp PM$，垂足为 E，因为平面 $PBM\perp$ 平面 PDA，交线为 PM，所以 $DE\perp BM$ 平面 PBM，从而 $DE\perp BM$.
因为 $PD\cap DE=D$，所以 $BM\perp$ 平面 PDA，于是 $BM\perp AD$；

……………………………………………………………（6 分）

（2）以 M 为坐标原点，$\overrightarrow{MA}$ 为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{MA}|$ 为单位长，建立如图所示的建立空间直角坐标系 $M-xyz$，则 z 轴在平面 PDA 内.

因为底面 $ABCD$ 是菱形，由（1）及题设可知 $MB=\sqrt{3}$，可得 $M(0,0,0)$，$P(-1,0,2)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-2,\sqrt{3},0)$，于是

$$\overrightarrow{MB}=(0,\sqrt{3},0),\overrightarrow{PB}=(1,\sqrt{3},-2),\overrightarrow{BC}=(-2,0,0).$$

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 MPB 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$，即

$\begin{cases}\sqrt{3}y_1=0,\\ x_1+\sqrt{3}y_1-2z_1=0.\end{cases}$ 可取 $m=(2,0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 CPB 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2x_2=0,\\ x_2+\sqrt{3}y_2-2z_2=0.\end{cases}$

可取 $m=(0,2,\sqrt{3})$.

因为

$$\sin <\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}> \sqrt{1-\cos^2 <\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>}=\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right)^2}=\frac{\sqrt{70}}{35}.$$

所以二面角 $M-PB-C$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{70}}{35}$.

…………………………… (12 分)

20. 解:

(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

…………………………… (4 分)

(2)设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$1\leqslant x_1<x_2$,则 $k_1=g'(x_1)$,$k_2=g'(x_2)$,$k=\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$.

于是 $k_1+k_2>2k$ 等价于

$$(x_2-x_1)[g'(x_1)+g'(x_2)]-2[g(x_2)-g(x_1)]>0.$$

因为 $g'(x)=3x^2-\frac{3}{x}$,所以

$$(x_2-x_1)[g'(x_1)+g'(x_2)]-2[g(x_2)-g(x_1)]=x_1^3\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)^3-3\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}\right).$$

因为 $x_1\geqslant1$,所以 $x_1^3\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)^3-3\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}\right)\geqslant\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)^3-3\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}\right)$.

设$\frac{x_2}{x_1}=t$,$t>1$,则$\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)^3-3\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}\right)=f(t)$.

由(1)可知,当 $t>1$ 时,$f(t)>f(1)=0$.

于是 $k_1+k_2>2k$.

…………………………… (12 分)

21. 解法 1:

(1)由题意 $a_5^2=a_1a_{17}$,所以$(a_1+4d)^2=a_1(a_1+16d)$.

因为 $d\neq0$,所以 $d=5$,故数列$\{a_{b_n}\}$的公比 $q=\frac{a_5}{a_1}=3$,所以

$$a_{b_n}=a_{b_1}3^{n-1}=10\cdot3^{n-1}.$$

又

$$a_{b_n}=a_1+(b_n-1)d=5(b_n+1).$$

所以

$$b_n=2\cdot3^{n-1}-1.$$

…………………………… (6 分)

(2)由(1)可知 $a_n=5(n+1)$，$S_n=\dfrac{5n^2+15n}{2}$，设 $f(n)=S_n-b_n$，则

$$f(n+1)-f(n)=5(n+2)-4\cdot 3^{n-1}.$$

设 $c_n=5(n+2)-4\cdot 3^{n-1}$，则

$$c_{n+1}-c_n=5-8\cdot 3^{n-1}<0.$$

故 $\{c_n\}$ 单调递减，因为 $c_2=8>0$，$c_3=-11<0$，所以当 $n\leqslant 2$ 时，$f(n+1)>f(n)$，

当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n+1)<f(n)$.

于是 $f(n)$ 的最大值为 $f(3)=28$.

…………………………… (12 分)

解法 2：

(1)同解法 1.

(2)由(1)可知 $a_n=5(n+1)$，$S_n=\dfrac{5n^2+15n}{2}$，设 $f(n)=S_n-b_n$，则

$$f(n+1)-f(n)=5(n+2)-4\cdot 3^{n-1}.$$

设 $g(x)=5(x+2)-4\cdot 3^{x-1}$，则当 $x\geqslant 2$ 时，$g'(x)=5-4\cdot 3^{x-1}\ln 3<5-12\ln 3<0$，$g(x)$ 单调递减.

因为 $g(1)=11>0$，$g(2)=8>0$，$g(3)=-11<0$，所以当 $n\leqslant 2$ 时，$f(n+1)>f(n)$，

当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n+1)<f(n)$.

于是 $f(n)$ 的最大值为 $f(3)=28$.

…………………………… (12 分)

解法 3：

(1)同解法 1.

(2)由(1)可知 $a_n=5(n+1)$，$S_n=\dfrac{5n^2+15n}{2}$.

设 $f(n)=S_n-b_n$，由 $\begin{cases}f(n)\geqslant f(n-1),\\ f(n)\geqslant f(n+1)\end{cases}$ 可得

$$\begin{cases}5(n+1)\geqslant 4\cdot 3^{n-2},①\\ 5(n+2)\leqslant 4\cdot 3^{n-1}.②\end{cases}$$

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，②不成立；

当 $n=3$ 时，①②同时成立；

当 $n\geqslant 4$ 时，$4\cdot 3^{n-2}=4(1+2)^{n-2}>4(1+2C_{n-2}^1+4C_{n-2}^2)>5(n+1)$，①不成立；

因此①②同时成立的正整数 $n=3$.

于是 $f(n)$ 的最大值为 $f(3)=28$.

…………………………… (12 分)

【后半部分也可以这样做】

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，②不成立；当 $n=3$ 时，①②同时成立；

设 $g(x)=4\cdot 3^{x-2}-5(x+1)$，则当 $x\geqslant 3$ 时，$g'(x)=4\cdot 3^{x-2}\ln 3-5>12\ln 3-5>0$，$g(x)$ 单调

递增.

所以当 $x\geqslant 4$ 时,$g(x)\geqslant g(4)=11>0$,①不成立;

因此①②同时成立的正整数 $n=3$.

于是 $f(n)$ 的最大值为 $f(3)=28$.

解法 4:

(1)同解法 1.

(2)由(1)可知 $a_n=5(n+1)$,$S_n=\dfrac{5n^2+15n}{2}$.

设 $f(n)=S_n-b_n$,由 $\begin{cases}f(n)\geqslant f(n-1),\\ f(n)\geqslant f(n+1).\end{cases}$ 可得

$$\begin{cases}\dfrac{n+1}{3^{n+1}}\geqslant\dfrac{4}{135},①\\ \dfrac{n+2}{3^{n+2}}\leqslant\dfrac{4}{135}.②\end{cases}$$

设 $g(x)=\dfrac{x}{3^x}-\dfrac{4}{135}$,则当 $x\geqslant 1$ 时,$g'(x)=\dfrac{1-x\ln 3}{3^x}<0$,$g(x)$ 单调递减.

因为 $g(4)=\dfrac{4}{81}-\dfrac{4}{135}>0$,$g(5)=\dfrac{5}{243}-\dfrac{4}{135}<0$,所以①②同时成立的正整数 $n=3$.

于是 $f(n)$ 的最大值为 $f(3)=28$.

…………………………… (12 分)

22. 解:

(1)由已知 $\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,可得 $a=\sqrt{2}b$,$c=b$.

可得 $F(-b,0)$,因为 PF 斜率为 1,所以 $P(0,b)$.

因为 $|PF|=\sqrt{2}$,所以 $b=1$,$a=\sqrt{2}$.

于是 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$;

…………………………… (6 分)

(2)由(1)知 $P(0,1)$,因为 $PM\perp PN$,所以 MN 不垂直于 x 轴.

设 $MN:y=kx+m(m\neq 1)$,代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

当 $\triangle=8(2k^2+1-m^2)>0$ 时,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则

$$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}.①$$

因为 $PM\perp PN$,所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$,故 $x_1x_2+(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)=0$,可得

$$(k^2+1)x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2=0.$$

将①代入上式可得 $(k^2+1)\dfrac{2m^2-2}{2k^2+1}-k(m-1)\dfrac{4km}{2k^2+1}+(m-1)^2=0$.

因为 $m\neq 1$，整理得 $m=-\frac{1}{3}$，直线 MN 经过定点 $Q\left(0,-\frac{1}{3}\right)$，$|PQ|=\frac{4}{3}$.

因为 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{2k^2+1}=\frac{4\sqrt{9k^2+4}}{3(2k^2+1)}$，所以 $\triangle PMN$ 面积

$$S=\frac{1}{2}|PQ||x_1-x_2|=\frac{8\sqrt{9k^2+4}}{9(2k^2+1)}.$$

设 $\sqrt{9k^2+4}=t$，则 $S=\frac{8}{2t+\frac{1}{t}}$，$t\geqslant 2$. 设 $f(t)=2t+\frac{1}{t}$，$f'(t)=2-\frac{1}{t^2}>0$.

所以当 $t=2$，$k=0$ 时，$\triangle PMN$ 面积取最大值$\frac{16}{9}$.

……………………………… (12 分)