2021～2022 学年高三新高考 12 月质量检测巩固卷

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $(\complement_U B)\cup A=$

A. $\{1\}$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{1,3,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 在复平面内，已知平行四边形 $OABC$ 的三个顶点 O,A,C 对应的复数分别为 $0,2+4i,-3+2i$，则点 B 对应的复数为

A. $-1+6i$　　B. $1+6i$　　C. $5+i$　　D. $-1+5i$

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

4. 两千多年前我们的祖先就使用“算筹”表示数，后渐渐发展为算盘. 算筹有纵式和横式两种排列方式，0～9 各个数字及其算筹表示的对应关系如下表：

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	〇	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	〇	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

排列数字时，个位采用纵式，十位采用横式，百位采用纵式，千位采用横式，……，纵式和横式依次交替出现. 如“𝍰𝍦”表示 87，“𝍤〇𝍡”表示 502. 在将“〇”“𝍪”“𝍢”“𝍥”“𝍱”按照一定顺序排列成无重复数字的三位数中任取一个，取到奇数的概率是

A. 0.7　　B. 0.6　　C. 0.4　　D. 0.3

5. 已知 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，则 $2\sin\alpha-\cos\alpha=$

A. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$　　B. $-\frac{3}{5}\sqrt{5}$　　C. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ 或 $-\frac{3}{5}\sqrt{5}$　　D. 0

6. 已知圆台下底面的半径为2，高为2，母线长为$\sqrt{5}$，则这个圆台的体积为

A. $\frac{14}{3}\pi$　　B. $\frac{7}{2}\pi$　　C. $\frac{14}{5}\pi$　　D. $\frac{7}{3}\pi$

7. 已知$a=\log_2 3$，$b=2^{\sqrt{3}}$，$c=\sqrt{3}$，则下列判断正确的是

A. $c<b<a$　　B. $c<a<b$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

8. 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，公比为q，且$a_1>1$，$a_6+a_7>a_6a_7+1>2$，记$\{a_n\}$的前n项积为T_n，则下列选项中不正确的是

A. $0<q<1$　　B. $a_6>1$　　C. $T_{12}>1$　　D. $T_{13}>1$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 函数$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$在下列区间上单调递增的是

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

10. 已知圆O：$x^2+y^2=9$，点$P(a,b)$在圆O外，以线段OP为直径作圆M，与圆O相交于A，B两点，则

A. 直线PA，PB均与圆O相切

B. 当$PA=PB=4$时，点P在圆$x^2+y^2=5$上运动

C. 当$PA=PB=3$时，点M在圆$x^2+y^2=\frac{9}{2}$上运动

D. 若$a=4$，$b=-2$，则直线AB的方程为$4x-2y-9=0$

11. 一口袋中有大小和质地相同的4个红球和2个白球，则下列结论正确的是

A. 从中任取3球，恰有一个白球的概率是$\frac{3}{5}$

B. 从中有放回的取球6次，每次任取一球，恰好有两个白球的概率为$\frac{80}{243}$

C. 从中不放回的取球2次，每次任取1球，若第一次已取到了红球，则第二次再次取到红球的概率为$\frac{2}{5}$

D. 从中有放回的取球3次，每次任取一球，则至少有一次取到红球的概率为$\frac{26}{27}$

12. 在棱长都相等的正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，E是AB的中点，O是BC_1的中点，则

A. AC_1//平面B_1CE

B. 若P是AC_1上的动点，则三棱锥$O-PEC$的体积为该正三棱柱体积的$\frac{1}{6}$

C. 异面直线AC_1与EB_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{4}$

D. 若在该三棱柱的内部放一个球，则该球的最大体积为该正三棱柱体积的$\frac{8\pi}{27}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若向量$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________.

14. 某校篮球队某队员若干场比赛的得分数据统计表如下：

每场比赛得分	3	6	7	10	11	13	30
频数	2	1	2	3	1	1	1

则该队员得分的中位数是________.

15. 已知过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 且斜率为 -1 的直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点，则 $|AB|=$________.

16. 已知函数 $f(x)=a^x-x^2$，其中 $a>1$. 若 $a=2$，则 $f(x)$ 有________个零点；若 $f(x)$ 有两个零点，则实数 a 的值构成的集合是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_2=4$，$S_7=56$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n}$，求证：$\frac{3}{b_1}+\frac{3}{b_2}+\cdots+\frac{3}{b_n}<1$.

18.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a<b<c$，三角形三边上的高之比为 $2:3:4$.

(1)求 $\cos C$ 的值；

(2)若 E 为边 AC 上一点，$\angle CEB=30°$，$BC=3$，求 BE 的长.

19.（本小题满分 12 分）

某网络科技公司在年终总结大会上，为增添喜悦、和谐的气氛，设计了闯关游戏这一环节，闯关游戏必须闯过若干关口才能成功. 其中第一关是答题，分别设置“文史常识题”“生活常识题”“影视艺术常识题”这 3 道题目，规定有两种答题方案：

方案一：答题 3 道，至少有两道答对；

方案二：在这 3 道题目中，随机选取 2 道，这 2 道都答对.

方案一和方案二中只要完成一个，就能通过第一关. 假设程序员甲和程序员乙答对这 3 道题中每一道题的概率都是 $p(p\in(0,1))$，且这 3 道题是否答对相互之间没有影响. 程序员甲选择了方案一，程序员乙选择了方案二.

(1)求甲和乙各自通过第一关的概率；

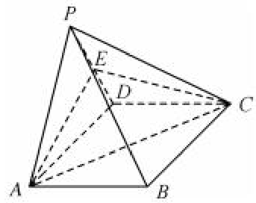
(2)设甲和乙中通过第一关的人数为 ξ，是否存在唯一的 p 的值 p_0，使得 $E(\xi)=1$? 并说明理由.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,$PA=PD=\sqrt{2}$,$AB=1$,$AD=2$,$PD\perp AB$.

(1)证明:平面 $PCD\perp$ 平面 PAB;

(2)若 $PB=\sqrt{3}$,试在棱 PD 上确定一点 E,使得平面 PAB 与平面 EAC 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.



21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$,它的短轴长为 $2\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)已知点 M,N 在 x 轴上,过椭圆 C 上一点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$作直线 PM,PN 分别交椭圆 C 于另一点 S,T,若 $PM=PN$,求证:$\triangle PST$ 的外接圆与过点 P 的直线 $l:x+2y-4=0$ 相切.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$,$g(x)=\tan x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)设函数 $F(x)=f(x)-g(x)$,试判断 $F(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的零点个数.

2021～2022 学年高三新高考 12 月质量检测巩固卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　$(\complement_U B)\cup A=\{1,5\}\cup\{1,3\}=\{1,3,5\}$. 故选 C.

2. A　法一：设 $B(x,y)$，由平行四边形 $CABC$ 知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$，得 $(x-2,y-4)=(-3,2)$，得 $x=-1,y=6$，所以点 B 对应的复数为 $-1+6\mathrm{i}$. 故选 A.

法二：由平行四边形 $CABC$ 知，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}$，得点 B 对应的复数为 $(2+4\mathrm{i})+(-3+2\mathrm{i})=-1+6\mathrm{i}$. 故选 A.

3. D　双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，则 $b=2a$，所以 $c^2=a^2+b^2=5a^2$，即 $c=\sqrt{5}a$，所以该双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$. 故选 D.

4. D　法一："〇""$\equiv$""$|||$""$\top$""$\perp$"对应"0，2，3，6，9"，其中 2 与 9 要放在十位，3 与 6 要放在个位或百位，0 要放在个位或十位，所有情况列举如下：326，320，396，390，306，623，620，693，690，603，其中奇数有 623，693，603. 故取到奇数的概率是 0.3. 故选 D.

法二："〇""$\equiv$""$|||$""$\top$""$\perp$"对应"0，2，3，6，9"，其中 2 与 9 要放在十位，3 与 6 要放在个位或百位，0 要放在个位或十位. 若三位数中无数字 0，则个位与百位上的数字只能是 3 与 6，十位上的数字为 2 或 9，共有 $A_2^2\times A_2^1=4$ 种情形，对应的三位数为 326，396，623，693；若三位数中有数字 0，则 0 在个位或十位. 若 0 在个位，则 3 或 6 在百位，2 或 9 在十位，共有 $A_2^1\times A_2^1=4$ 种情形，对应的三位数为 320，390，620，690；若 0 在十位，则个位与百位上的数字只能是 3 与 6，对应的三位数为 306，603. 共有 10 个三位数，其中奇数的个数有 3 个. 由古典概型，所求概率 $P=\dfrac{3}{10}=0.3$. 故选 D.

5. B　$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1}{3}$，解得 $\tan\alpha=2$. 因为 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2>0$，$\alpha\in(\pi,2\pi)$，所以 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $2\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

6. A　设圆台上底面的半径为 r，有 $(\sqrt{5})^2=(2-r)^2+2^2$，解得 $r=1$ 或 $r=3$（舍去）. 法一：圆台的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\pi\times2^2\times4-\dfrac{1}{3}\times\pi\times1^2\times2=\dfrac{14}{3}\pi$. 故选 A. 法二：圆台的体积为 $\dfrac{1}{3}\times2\times(2^2+1^2+2\times1)\times\pi=\dfrac{14}{3}\pi$. 故选 A.

7. C　$b=2^{\sqrt{3}}>2^1=2$，$c=\sqrt{3}<2$，$a=\log_2 3<\log_2 4=2$. 法一：观察 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象，前者过点 $(0,0)$，后者过点 $(1,0)$，它们的图象都过的第一个点是 $(4,2)$，则当 $x=3$ 时，$c=\sqrt{3}>\log_2 3=a$. 故选 C.

法二：构造函数 $f(x)=\log_2 x-\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2-\sqrt{x}\ln 2}{2x\ln 2}$. $f'(x)>0\Leftrightarrow 2>\sqrt{x}\ln 2\Leftrightarrow 0<x<\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)^2$，所以 $f(x)=\log_2 x-\sqrt{x}$ 在 $\left(0,\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)^2\right)$ 上单调递增，又 $\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)^2>2^2>3$，所以 $f(3)<f(4)=0$，即 $\log_2 3<\sqrt{3}$. 所以 $a<c$. 综上，$b>c>a$. 故选 C.

法三：因为 $c=\sqrt{3}=\log_2 2^{\sqrt{3}}$，函数 $y=\log_2 x$ 为增函数，所以比较 a 与 c 的大小，即比较 $2^{\sqrt{3}}$ 与 3 的大小即可，可构造函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$y'>0$，函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 单调递增，所以 $\dfrac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 2}{2}$，即得 $\ln 3<\ln 2^{\sqrt{3}}$，又函数 $y=\ln x$ 为增函数，所以 $3<2^{\sqrt{3}}$，所以 $a<c$. 故选 C.

8. D　因为等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，由 $a_6+a_7>a_6a_7+1>2$，得 $(a_6-1)(a_7-1)<0$，因为 $a_1>1$，若 $a_6<1$，则一定有 $a_7<1$，不符合题意，故 $a_6>1$，$a_7<1$，所以 $0<q<1$. 因为 $a_6a_7+1>2$，所以 $a_6a_7>1$，$T_{12}=a_1a_2a_3\cdots a_{12}=(a_6a_7)^6>1$，$T_{13}=a_7^{13}<1$. 故选 D.

9. BC　$f(x)=-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，由 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时，有 $\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$；当 $k=-1$ 时，有 $-\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant-\dfrac{\pi}{6}$，只有 BC 符合. 故选 BC.

10. ACD　由于 OP 为直径，则 $\angle CAP=\angle OBP=90^\circ$，所以直线 PA，PB 均与圆 O 相切；当 $PA=PB=4$ 时，因为 $CA=OB=3$，$\angle CAP=\angle OBP=90^\circ$，则 $OP=5$，所以点 P 在圆 $x^2+y^2=25$ 上运动；当 $PA=PB=3$ 时，$OA=OB=3$，则圆 M 的

半径为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以点 M 在圆 $x^2+y^2=\frac{9}{2}$ 上运动；若 $a=4,b=-2$，则点 $M(2,-1)$，圆 $M:(x-2)^2+(y+1)^2=5$，又圆 $O:x^2+y^2=9$，将这两圆的方程两端分别相减并整理，得直线 AB 的方程为 $4x-2y-9=0$. 故选 ACD.

11. ABD　从中任取 3 球，由古典概型，恰有一个白球的概率是$\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$；从中有放回的取球 6 次，每次任取一球，则取到白球的个数 $X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，故恰好有两个白球的概率为 $C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$；从中不放回的取球 2 次，每次任取 1 球，记 A 为"第一次取到红球"，B 为"第二次取到红球"，则所求概率为 $P(B|A)=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5}$；从中有放回的取球 3 次，每次任取一球，则取到红球的个数 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，至少有一次取到红球的概率为 $1-C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{26}{27}$. 故选 ABD.

12. AC　对于 A，连接 OE，则 OE 为$\triangle C_1AB$ 的中位线，则 $AC_1 /\!/ OE$，因为 $OE\subset$平面 B_1CE，$AC_1\not\subset$平面 B_1CE，所以 $AC_1 /\!/$ 平面 B_1CE，A 正确；对于 B，P 是 AC_1 上的动点，由 A 知 $AC_1 /\!/$ 平面 OCE，$V_{三棱锥D\text{-}PEC}=V_{三棱锥P\text{-}ECD}=V_{三棱锥A\text{-}ECD}=V_{三棱锥D\text{-}AEC}=\frac{1}{12}V_{三棱柱}$，B 错误；对于 C，$AC_1 /\!/ OE$，异面直线 AC_1 与 EB_1 所成的角，即为 OE 与 B_1E 所成的角. 设正三棱柱的棱长都为 2，在$\triangle OEB_1$ 中，$OE=OB_1=\sqrt{2}$，$EB_1=\sqrt{5}$，由余弦定理得 $\cos\angle OEB_1=\frac{\sqrt{10}}{4}$，C 正确；对于 D，设正三棱柱的棱长都为 2，该球的最大半径为$\frac{1}{\sqrt{3}}$，则$\frac{V_{球}}{V_{柱}}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{\sqrt{3}\times 2}=\frac{2\pi}{27}$，D 错误. 故选 AC.

13. $\frac{\pi}{6}$　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=4\cos\theta$，得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

14. 10　由统计表可知该队员共比赛 11 场，将各场得分由小到大排列，第 6 个数为 10，故该队员得分的中位数是 10.

15. 8　直线 l 的方程为 $y=1-x$，代入 $y^2=4x$ 得 $x^2-6x+1=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=6$，所以 $|AB|=x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=8$.

16. 3(2 分)　$\{e^{\frac{2}{e}}\}$(3 分)　由 $y=2^x$，$y=x^2$ 的图象可知，它们在第二象限必有一个交点，即方程 $2^x-x^2=0$ 有一个负根，又 $x>0$ 时 $y=2^x$，$y=x^2$ 的图象交于(2,4)和(4,16)两点，所以 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 有 3 个不同的零点；令 $f(x)=a^x-x^2=0$，即 $a^x=x^2$（其中 $a>1$），由 $y=a^x(a>1)$，$y=x^2$ 的图象可知，它们在第二象限必有一个交点，即函数 $f(x)$ 必有一个小于 0 的零点；当 $x>0$ 时，对 $a^x=x^2$ 两边取对数，得 $x\ln a=2\ln x$，所以$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{2}$有一个根，即 $y=\frac{\ln x}{x}$的图象与直线 $y=\frac{\ln a}{2}$有一个公共点，则$\frac{\ln a}{2}=\frac{1}{e}$或$\frac{\ln a}{2}\leqslant 0$，即 $a=e^{\frac{2}{e}}$ 或 $a\leqslant 1$（不符合题意），所以实数 a 的值构成的集合是 $\{e^{\frac{2}{e}}\}$.

17. (1)解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由 $a_2=4$，得 $a_1+d=4$，①，由 $S_7=56$，得 $7a_1+\frac{7\times 6}{2}d=56$，② …… 2 分

联立①②，解得 $a_1=d=2$，

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$. …… 4 分

(2)证明：由(1)可知，$b_n=2^{a_n}=2^{2n}=4^n$，故$\frac{1}{b_n}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$， …… 6 分

则 $3\times\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}\right)=3\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\frac{\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$. …… 8 分

又因为$\left(\frac{1}{4}\right)^n>0$，故 $1-\left(\frac{1}{4}\right)^n<1$，即$\frac{3}{b_1}+\frac{3}{b_2}+\cdots+\frac{3}{b_n}<1$. …… 10 分

18. 解：(1)由于 $a<b<c$，则三边 a,b,c 上的高之比为 $h_1:h_2:h_3=4:3:2$.

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_1=\frac{1}{2}bh_2=\frac{1}{2}ch_3$，则 $4a=3b=2c$. …… 2 分

设 $4a=3b=2c=12x$，则 $a=3x$，$b=4x$，$c=6x$.

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ba}$ …… 4 分

$=\frac{9x^2+16x^2-36x^2}{24x^2}=-\frac{11}{24}$. …… 6 分

(2)将 $\cos C=-\frac{11}{24}$代入 $\sin^2C+\cos^2C=1$,得 $\sin^2C=1-\cos^2C=\frac{35\times13}{24^2}$,

又 $C\in(0,\pi)$,则 $\sin C=\frac{\sqrt{35\times13}}{24}=\frac{\sqrt{455}}{24}$. ………… 8分

在$\triangle EBC$中,由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\angle CEB}=\frac{BE}{\sin C}$, ………… 10分

则 $BE=6\times\frac{\sqrt{455}}{24}=\frac{\sqrt{455}}{4}$. ………… 12分

19.解:(1)设答对题目的个数为 X,由题意,得 $X\sim B(3,p)$. ………… 2分

甲通过第一关的概率为 $P_1=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=3p^2-2p^3$; ………… 4分

乙通过第一关的概率为 $P_2=p^2$. ………… 6分

(2)ξ的可能取值为0,1,2,则 $P(\xi=0)=(1-P_1)(1-P_2)$, ………… 7分

$P(\xi=1)=P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2$, ………… 8分

$P(\xi=2)=P_1P_2$, ………… 9分

所以 $E(\xi)=0\times(1-P_1)(1-P_2)+1\times[P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2]+2\times P_1P_2=P_1+P_2=3p^2-2p^3+p^2=4p^2-2p^3$.

………… 10分

设 $f(p)=4p^2-2p^3-1(0<p<1)$,则 $f'(p)=8p-6p^2=2p(4-3p)>0$,

从而当 $0<p<1$ 时,$f(p)$为增函数,又 $f(0)=-1$,$f(1)=1$,

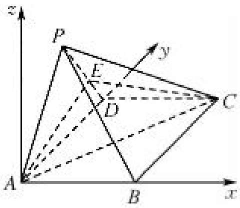
所以存在唯一的 p 的值 $p_0\in(0,1)$,使得 $f(p)=0$,即 $E(\xi)=1$. ………… 12分

20.(1)证明:因为 $PA=PD=\sqrt{2}$,$AD=2$,则 $PA^2+PD^2=AD^2$,则 $PD\perp PA$. ………… 2分

又因为 $PD\perp AB$,AB,$PA\subset$平面 PAB,且 $AB\cap PA=A$,所以 $PD\perp$平面 PAB. ………… 4分

又 $PD\subset$平面 PCD,于是平面 $PCD\perp$平面 PAB. ………… 5分

(2)解:$PA=\sqrt{2}$,$AB=1$,$PB=\sqrt{3}$,则 $PA^2+AB^2=PB^2$,则 $AB\perp PA$,又 $PD\perp AB$,PA,$PD\subset$平面 PAD,且 $PD\cap PA=A$,所以 $AB\perp$平面 PAD. 又 $AD\subset$平面 PAD,则 $AB\perp AD$,所以四边形 $ABCD$ 为矩形. ………… 6分



以 A 为原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向,建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 如图所示,则 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(1,2,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,1,1)$,所以$\overrightarrow{AC}=(1,2,0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$,由 $PD\perp$平面 PAB,知$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$是平面 PAB 的一个法向量.

………… 8分

设$\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{PD}$,则 $E(0,2-\lambda,\lambda)$,所以$\overrightarrow{AE}=(0,2-\lambda,\lambda)$.

设平面 EAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}(2-\lambda)y+\lambda z=0,\\ x+2y=0,\end{cases}$令 $y=-1$,得 $\boldsymbol{n}=\left(2,-1,\frac{2-\lambda}{\lambda}\right)$. ………… 10分

所以$|\cos\langle\overrightarrow{PD},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,所以 $12\lambda^2-8\lambda+1=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$或$\frac{1}{6}$.

即点 E 满足$\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$或$\overrightarrow{ED}=\frac{1}{6}\overrightarrow{PD}$时符合题意. ………… 12分

21.(1)解:设椭圆的焦距为 $2c$,由题意得$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ 2b=2\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得 $a=2$,$b=\sqrt{3}$, ………… 2分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………… 4分

(2)证明:因为 $PM=PN$,所以直线 PM,PN 的倾斜角互补,则直线 PM,PN 斜率存在且互为相反数,设直线 PM 的斜率为 k,则 PM 的方程是 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)$,由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y-\frac{3}{2}=k(x-1),\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+(12k-8k^2)x+4k^2-12k-3=0$.

设 $S(x_1,y_1)$,PS 的中点是 $E(x_0,y_0)$,

则 $x_0=\frac{x_1+1}{2}=\frac{4k^2-6k}{3+4k^2}$,$y_0=k(x_0-1)+\frac{3}{2}=\frac{9-6k}{6+8k^2}$, ………… 6分

所以线段 PS 的垂直平分线方程是 $y-\frac{9-6k}{6+8k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{4k^2-6k}{3+4k^2}\right)$. ①

同理线段 PT 的垂直平分线方程是 $y-\frac{9+6k}{6+8k^2}=\frac{1}{k}\left(x-\frac{4k^2+6k}{3+4k^2}\right)$. ② ………………………………… 8 分

①+②,得 $y=-\frac{3}{6+8k^2}$,①−②,得 $x=\frac{k^2}{3+4k^2}$,

即△PST 的外接圆的圆心 $F\left(\frac{k^2}{3+4k^2},-\frac{3}{6+8k^2}\right)$, ………………………………… 10 分

则直线 PF 的斜率为 $k_{PF}=\frac{-\frac{3}{6+8k^2}-\frac{3}{2}}{\frac{k^2}{3+4k^2}-1}=2$,又 $k_l=-\frac{1}{2}$,故 $PF\perp l$. 又直线 l 过点 P,

所以△PST 的外接圆与直线 l 相切. ………………………………… 12 分

22. 解:(1)函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$,$f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$. ………………………………… 2 分

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$,$(0,1)$ 上单调递减,在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 5 分

(2)令 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{e^x}{x}-\tan x=0$,得 $x\sin x-e^x\cos x=0$.

设 $h(x)=x\sin x-e^x\cos x$,所以 $h'(x)=(e^x+1)\sin x+(x-e^x)\cos x$.

①当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时,可知 $e^x>0>x$,则 $e^x>x$,所以 $x-e^x<0$,

又 $\sin x<0$,$\cos x>0$,所以 $h'(x)<0$,从而 $h(x)=x\sin x-e^x\cos x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减,

又 $h(0)=-1$,$h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$,

由零点存在定理及 $h(x)$ 的单调性,得 $h(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上有一个零点. ………………………………… 7 分

②当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$\cos x\geqslant\sin x>0$,由(1)知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时,函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}>f(1)=e>1$,则 $e^x>x>0$,

所以 $e^x\cos x>x\sin x$,则 $h(x)=x\sin x-e^x\cos x<0$ 恒成立.

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上无零点. ………………………………… 9 分

③当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$\sin x>\cos x>0$,$h'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+(x\cos x+\sin x)>0$,

则 $h(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

又 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$,$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}-e^{\frac{\pi}{4}}\right)<0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在一个零点. ………………………………… 11 分

综上,$h(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内零点个数为 2,即 $F(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点个数为 2. ……… 12 分

关于我们