中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 2 月测试

数学文科试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共.12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.　　、

1. 已知集合 M={ $y\mid y=x^2-1,x\in R$ }，N=={ $x\mid y=\sqrt{4-x^2}$ }，则集合 $M\cup N=$

A. [-1,2]　B. [-1,∞]　C. [-2,∞]　D. ϕ

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{|3+4i|}{2+i}$ 对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

3. “ $\sin\alpha=\cos\alpha$ ” 是 “ $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z$ ” 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

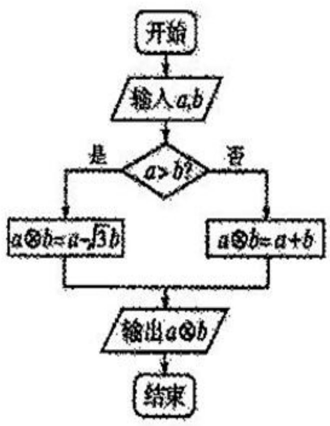
4. 在正方体 ABCD $-A_1B_1C_1D_1$ 中的面内任取一点 S ，作三棱锥 S-ABC, 在正方体内随机取点 M, 那么点 M 落在三棱锥 S-ABC 内部的概率是

A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{1}{3}$　C. $\dfrac{1}{6}$　D. $\dfrac{1}{9}$

5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心力 $e=3$，则双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm 2\sqrt{2}x$　B. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$　C. $y=\pm\sqrt{10}x$　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}x$

6. 执行下面的程序框图，若输入 $a=\sin 30^0$， $b=\cos 30^0$，则输出的 $a\otimes b$ 的值为



A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

7. 以下命题（其中 a，b 表示直线，α 表示平面）

①a//b，b$\subset\alpha$，则 a//α　　②若 a//b，b// a，则 a//b

③若 a//b，b//α，则 a //α　④若 a //α，b$\subset\alpha$，则 a//b

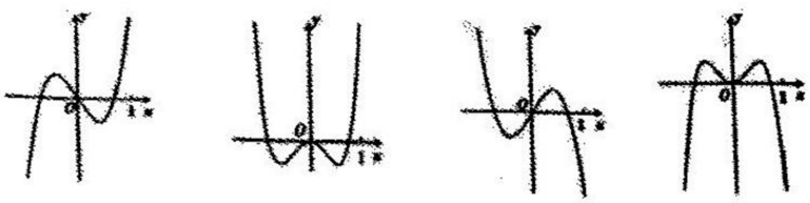
其中正确命题的个数是

A.3　B.2　C.1　D.0

8. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le x \\ x+y\ge 0 \\ x\le 3 \end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最大值为

A.6　B.7　C.8　D.9

9. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ 为奇函数，且在（0，1）上存在极大值，则 $f'(x)$ 的图像可能为



A.　　B.　　C.　　D.

10．$f(x)$ 是定义在（0，$\dfrac{\pi}{2}$）内的函数，$f(x)$ 为其导函数，且 $f(x)<\tan\cdot f'(x)$ 恒成立，则

A. $f(\frac{\pi}{2})<2f(\frac{\pi}{6})$　B. $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})<\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$

C. $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})<f(\frac{\pi}{3})$ D. $f(1)<2f(\frac{\pi}{6})\sin 1$

11. 如图，已知 AB 是圆 O 的直径，AB=2a（a>0]，点 C 在直线 AB 的延长线上，BC=a，点 P 是半圆 O 上的动点，以 PC 为边作等边三角形 PCD，且点 D 与圆心分别在 PC 的两侧，记 $\angle POB=x$，将 ΔOPC 和 ΔPCD 的面积之和表示成 x 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 取最大值时 x 的值为

A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{2}$ D. π

12. 设直线 l 抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，与圆 $(x-5)^2+y^2=r^2$（r>0）相切于点 M，且 M 为线段 AB 的中点，若这样的直线 l 恰有 4 条，则以下命题正确的是

①点 M 的横坐标为定值 3 ②点 M 的纵坐标为定值 3

③圆的半径 r 的范围是（1，3）④圆的半径 r 的范围是（2，4）

A. ① B. ④ C. ②③ D. ①④

二、填空题；本题共 4 小题，每小题 5 分， 共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$，满足 $\vec{a}+2\vec{b}=(1,-3),2\vec{a}-\vec{b}=(1,9)$，则 $\vec{a},\vec{b}$= __________。

14. 函数 $f(x)=\ln x+x^2-bx=2018(b>0,a\in R)$ 的图象在点（$b,f(b)$）处的切线斜率最小值是______.

15. 已知点 A, B, C, D 在同一球的球面上，AB=BC=a, AC=$\sqrt{2}$ a，若四面体 ABCD 外接球的球心 O 恰好在侧棱 DA 上，DC=$\sqrt{6}$ a，则这个球的表面积为______。

16. 在△ABC 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a，b, c，且 $\frac{\sin C}{\sin A-\sin B}=\frac{a+b}{a-c}$，点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$，且线段 AD=3，则 $2a+c$ 的最大值为______。

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

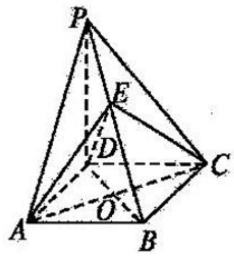
17. (12 分)在△ABC 中，角 A，B, C 对应的边分别为 a，b，c，且满足 $b\cos A-a\sin B=0$.

(1)求角 A 的大小；

(2)已知$b=\sqrt{2}$，△ABC 的面积为 1，求边 a.

18.（12 分）如图，在四棱锥 P－ABCD 中，PD⊥平面 ABCD，底面 ABCD 是菱形，∠BAD=60^0

AB=2a，PD=$2(1-a^2)$，其中 0＜a＜1，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为棱 PB 上一点。



(1)求证：平面 EAC⊥平面 PBD；

(2)若 PD∥平面 EAC，求三棱锥 P-EAD 的体积的最大值。

＜＞

19. 分双十一之后，网购粉丝们期待的双十二已然到来，为了解双十二消费者购物情况和电商的营业情况，做如下数据分析。据悉 12 月 12 日有 2000 名网购者在某购物网站进行网购消费（消费金额不超过 1000 元），其中有女士 1100 名，男士:900 名，该购物网站为优化营销策略，根据性别采用分层抽样的方法从这 2000 名网购者中抽取 200 名进行分析，如表。（消费金额单位：元）

女士消费情况：

消费金额	(0，200)	[200，400)	[400，600)	[600，800)	[800，1000]
人数	10	25	35	30	x

男士消费情况：

消费金额	(0，200)	[200，400)	[400，600)	[600，800)	[800，1000]
人数	15	30	25	y	5

(1)计算 x，y 的值，在抽出的 200 名且消费金额在[800，1000]（单位：元）网购者中随机选出 2 名发放网购红包，求选出的 2 名网购者都是男士的概率；

(2)若消费金额不低于 600 元的网购者为“网购达人”，低于 600 元的网购者为“非网购达人”，根据以上统计数据填写下面 2×2 列联表，并回答能否在犯错误的概率上不超过 0.05 的前提下认为“是否为网购达人”与性别有关?”

	女士	男士	总计
网购达人			
非网购达人			
总计			

附：

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},\qquad n=a+b+c+d$$

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

20. (12分)已知椭圆 M: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个顶点分别为 A（-a,0）,B(a,0)，点 P 为椭圆上异于 A,B 的点，设直线 PA 的斜率为 k_1，直线 PB 的斜率为 k_2， $k_1k_2=-\frac{1}{2}$。

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)若 b=1，设直线 l 与 x 轴交于 D （-1，0），与椭圆交于 M，N 两点，求△OMN 的面积的最大值。

21.(12 分)设函数 $f(x)=\ln x+\frac{a-1}{x},g(x)=ax-3$，

(1) 求函数 $f(x)=f(x)+g(x)$ 的单调增区间；

(2)当 a=1 时，记 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$，是否存在整数 λ，使得关于 x 的不等式 $2\lambda\geq h(x)$ 有解？若存在，请求出 λ 的最小值；若不存在，请说明理由。

（二）选考题：共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xoy 中，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=1+\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以 O 为极点，x

轴的非负半轴为极轴建立极坐标系。

半圆 C（圆心为点 C）的参数方程为$\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=1+\sin\varphi \end{cases}$ φ 为参数，$\{\varphi\in(0,\pi)$.

(1)求圆 C 的普通方程;

(2)直线 l 的极坐标方程是 $2\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=5\sqrt{3}$，射线 OM：$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 与 C 圆 C 的交点为 O、P，与直线 l 的交点为 Q，求线段 PQ 的长。

23.［选修 4-5　不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-1|+|x-2|$.

⑴求不等式 $f(x)\ge 3$ 的解集;

.(2)若存在实数 x 满足 $f(x)\le -a^2+a+5)$，求实数 a 的最大值。