

2024 届高三暑假作业检测试卷
数学

本试卷共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x\leq 2\}$, $B=\{-1,0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$

- A. $\{-1,0,1\}$ B. $\{-1,0\}$ C. $\{0,1\}$ D. $\{0,1,2\}$

2. 已知 $(1-ai)(2+i)=b+3i$ (i 为虚数单位), 其中 a, b 为实数, 则 a, b 的值分别为

- A. $-1, 1$ B. $1, -1$ C. $1, 1$ D. $-1, -1$

★3. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 上一点, F_1, F_2 分别是双曲线左、右两个焦点, 若 $|PF_1|=9$, 则 $|PF_2|$ 等于

- A. 1 B. 8 C. 17 D. 1 或 17

4. 为了庆祝中国共产党第二十次全国代表大会, 学校采用按比例分配的分层随机抽样的方法从高一 1002 人, 高二 1002 人, 高三 1503 人中抽取 126 人观看“中国共产党第二十次全国代表大会”直播, 那么高三年级被抽取的人数为

- A. 36 B. 42 C. 50 D. 54

★5. 一个圆锥的侧面展开图是圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 弧长为 2π 的扇形, 则该圆锥轴截面的面积 $S=$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{5}$

★6. 已知 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, $\sin(\frac{5\pi}{4} + \beta) = -\frac{12}{13}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{4})$, 则 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值为

- A. $\frac{56}{65}$ B. $\frac{33}{65}$ C. $-\frac{16}{65}$ D. $-\frac{63}{65}$

7. 某学生进行投篮训练, 采取积分制, 有 7 次投篮机会, 投中一次得 1 分, 不中得 0 分, 若连续投中两次则额外加 1 分, 连续投中三次额外加 2 分, 以此类推, 连续投中七次额外加 6 分, 假设该学生每次投中的概率是 $\frac{1}{2}$, 且每次投中之间相互独立, 则该学生在此次训练中恰好得 7 分的概率是

- A. $\frac{9}{128}$ B. $\frac{5}{64}$ C. $\frac{11}{128}$ D. $\frac{3}{32}$

8. 设 $a = \frac{2}{21}$, $b = \sin^2 \frac{2}{21}$, $c = \ln \frac{11}{10}$, 则

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

★9. 已知 m, n 是两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 下列命题不正确的是

- A. 若 $m // \alpha, m // \beta, n // \alpha, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$ B. 若 $m \perp n, m // \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $m // n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha // \beta$

★10. 已知圆 $M: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, 以下结论正确的是

- A. 过点 $A(1, 2)$ 与圆 M 相切的直线方程为 $x=1$
B. 圆 M 与圆 $N: (x+4)^2 + (y-6)^2 = 1$ 相交
C. 过点 $(1, 1)$ 可以作两条直线与圆 M 相切
D. 圆 M 上的点到直线 $4x - 3y + 5 = 0$ 的距离的最大值为 3

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 F 是抛物线 $C: y^2 = ax (a > 0)$ 的焦点, 两点 $A(\frac{a}{16}, 1), B(a, b) (b < 0)$ 在抛物线 C 上, 则下列说法正确的是

- A. 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ B. $b = -4$
C. 以 AB 为直径的圆的方程是 $(x - \frac{17}{8})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{8}$ D. A, F, B 三点共线

12. 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且 $3f(x) + xf'(x) > 0$, 则对任意 $x_1 < x_2$, 下列结论成立的是

A. $\frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{x_2^{\frac{3}{2}}} < \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$

B. $e^{3x_1} f(e^{x_1}) > 0$

C. 不存在 x_1, x_2 , 使得 $x_1^{\frac{3}{2}} f(x_1^2) = x_2^{\frac{3}{2}} f(x_2^2)$

D. 存在 x_1, x_2 , 使得 $\frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{x_2^{\frac{3}{2}}} f(\frac{x_1}{x_2}) < f(1)$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $|a|=3, b=(1,2)$, 则 $(a+b) \cdot (a-b) =$ _____.

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1+a_3+a_7+a_9=28$, 则 $S_9 =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = 1 - \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023) =$ _____.

★16. 当 $x \in [-2, 1]$ 时, 不等式 $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, 且 $c \sin B \sin C = (c \cos B + 2b - a) \cos C$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $c^2 = 2ab$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $a+b$ 的值.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_3 = 620, S_{n+1} = 5S_n + 20$.

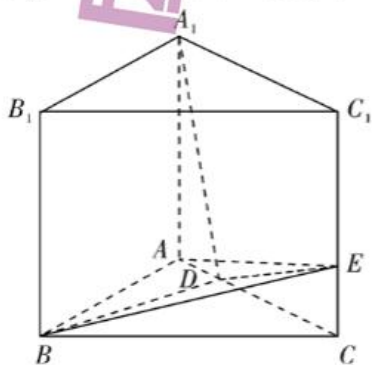
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_5 \frac{a_n}{4}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 $\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \dots + \frac{1}{T_n}$.

19. (12 分) 如图所示, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC, AB=AC=AA_1=3, AD = \frac{1}{3}AC, CE = \frac{1}{3}CC_1$.

(1) 求证: $A_1D \perp BE$;

(2) 求直线 A_1D 与平面 BDE 所成角的正弦值.



★20. (12 分) 元宵佳节, 是民间最重要的民俗节日之一. 在某庆祝活动现场, 为了解观众对该活动的观感情况(“一般”或“激动”), 现从该活动现场的观众中随机抽取 200 名, 得到下表:

性别	观感情况		总计
	一般	激动	
男性		90	120
女性	25		
总计			200

(1) 填补上面的 2×2 列联表, 并依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验, 能否认为性别与对该活动的观感程度有关?

(2) 该活动现场还举行了有奖促销活动, 凡当天消费每满 300 元, 可抽奖一次. 抽奖方案是: 从装有 3 个红球和 3 个白球(形

状、大小、质地完全相同)的抽奖箱里一次性摸出 2 个球,若摸出 2 个红球, 则可获得 100 元现金的返现;若摸出 1 个红球,则可获得 50 元现金的返现;若没摸出红球,则不能获得任何现金返现.若某观众当天消费 600 元,记该观众参加抽奖获得的返现金额为 X ,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.100	0.050	0.010	0.001
x_{α}	2.706	3.841	6.635	10.828

21. (12 分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 B 是椭圆 C 的上顶点, $\triangle BF_1F_2$ 是等边三角形, $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆的面积为 $\frac{\pi}{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)已知 T 在 x 轴负半轴上且 $|OT| = 4|OF_2|$, 过 T 的直线与椭圆交于 M, N 两点, 求 $\triangle MNF_1$ 面积的最大值.

22. (12 分)已知函数 $f(x) = e^{x-t} - x$.

(1)若 $f(x)$ 在 $(t, f(t))$ 处的切线方程平行于直线 $x - y + 1 = 0$, 求 t 的值以及此时的切线方程;

(2)若方程 $f(x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数根, 求实数 t 的取值范围.

2024 届高三暑假作业检测试卷

数学参考答案

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	D	C	A	B	C

1. D 【解析】 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$, 故选 D.

2. A 【解析】由 $(1-ai)(2+i) = b+3i$, 得 $2+i-2ai-ai^2 = b+3i$, 得 $2+a+(1-2a)i = b+3i$, 所以 $\begin{cases} 2+a=b, \\ 1-2a=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=1. \end{cases}$ 故选 A.

3. C 【解析】对于 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$, $a^2 = 16$, $b^2 = 20$, $\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 36$, $a = 4$, $c = 6$,

$|PF_1| = 9 < a + c$, 所以 P 点在双曲线的左支, 则有 $|PF_2| - |PF_1| = 2a = 8$, $\therefore |PF_2| = 17$. 故选 C.

4. D 【解析】根据分层抽样的方法, 高三年级被抽取的人数为 $126 \times \frac{1503}{1002+1002+1503} = 54$ 人. 故选 D.

5. C 【解析】设圆锥的母线长为 l , 底面半径为 r , 由弧长公式得: $2\pi = \frac{2\pi}{3}l$, $\therefore l = 3$,

又 $\because 2\pi r = 2\pi$, $\therefore r = 1$, \therefore 圆锥的高 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 2\sqrt{2}$.

\therefore 该圆锥轴截面的面积 $S = \frac{1}{2} \times 2r \times h = 2\sqrt{2}$, 故选 C.

6. A 【解析】 $\because \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, $\sin(\frac{5\pi}{4} + \beta) = -\frac{12}{13}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{4})$,

$\therefore -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \alpha < 0$, $\frac{5\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + \beta < \frac{3\pi}{2}$,

$\therefore \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -\frac{4}{5}$, $\cos(\frac{5\pi}{4} + \beta) = -\frac{5}{13}$,

$\therefore \sin[(\frac{5\pi}{4} + \beta) - (\frac{\pi}{4} - \alpha)] = \sin(\frac{5\pi}{4} + \beta)\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{5\pi}{4} + \beta)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = (-\frac{12}{13}) \times \frac{3}{5} - (-\frac{5}{13}) \times (-\frac{4}{5}) = -\frac{56}{65} = \sin(\pi + \alpha + \beta) = -\sin(\alpha + \beta)$.

$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}$. 故选 A.

7. B 【解析】若连中 4 次, 额外加 3 分, 剩余 3 次不中, 满足要求, 此时将连中 4 次看作一个整体, 与其他三次不中排序, 共有 $C_4^1 C_3^3 = 4$ 种选择, 故概率为 $4 \times (\frac{1}{2})^4 (1 - \frac{1}{2})^3 = \frac{1}{32}$. 若连中 3 次, 额外加 2 分, 剩余 4 次, 两次投中, 两次没投中, 且两次投中不连续, 故两次不中之间可能为一次中, 也可能是三次中, 有以下情况: 中中中(不中)中(不中)中, 中(不中)中中中(不中)中, 中(不中)中(不中)中中中, 则概率为 $C_3^1 (\frac{1}{2})^5 (1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{128}$. 若有两次连中两回, 中中(不中)中中(不中)中, 中(不中)中中(不中)中中, 中中(不中)中(不中)中中, 满足要求, 则概率为 $C_3^2 (\frac{1}{2})^5 (1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{128}$. 综上, 该生在比赛中恰好得 7 分的概率为 $\frac{1}{32} + \frac{3}{128} + \frac{3}{128} = \frac{5}{64}$. 故选 B.

8. C 【解析】记 $f(x) = \sin x - x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 所以

$f(x) \leq f(0) = 0$, 所以在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $\sin x < x$, 所以 $\sin \frac{2}{21} < \frac{2}{21}$, 即 $b < a$; 对于 a, c , 由 $\frac{2(\frac{11}{10}-1)}{\frac{11}{10}+1} = \frac{2}{21}$, $c - a = \ln \frac{11}{10}$



$-\frac{2(\frac{11}{10}-1)}{\frac{11}{10}+1}$. 记 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, $x \geq 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$

上单调递增, 所以 $h(\frac{11}{10}) > h(1) = 0$, 所以 $c - a > 0$, 所以 $c > a$. 综上所述: $c > a > b$. 故选 C.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	ABC	ACD	ABD	BD

9. ABC 【解析】由 m, n 是两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 知:

在 A 中, 若 $m // \alpha, m // \beta, n // \alpha, n // \beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 A 错误;

在 B 中, 若 $m \perp n, m // \alpha, n \perp \beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 B 错误;

在 C 中, 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 C 错误;

在 D 中, 若 $m // n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则由线面垂直, 线线平行的性质可得 $\alpha // \beta$, 故 D 正确. 故选 ABC.

10. ACD 【解析】依题意, 圆 $M: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 的圆心 $M(-1, 2)$, 半径 $r=2$, 对于 A, 点 $A(1, 2)$ 在圆 M 上, 圆心 M 到直线 $x=1$ 距离为 2, 即过点 $A(1, 2)$ 与圆 M 相切的直线方程为 $x=1$, A 正确; 对于 B, 圆 $N: (x+4)^2 + (y-6)^2 = 1$ 的圆心 $N(-4, 6)$, 半径 $r'=1$, 则有 $|MN| = \sqrt{[-1-(-4)]^2 + (2-6)^2} = 5 > r+r'$, 即圆 M 与圆 N 外离, B 不正确; 对于 C, 点 $(1, 1)$ 在圆 M 外, 则过点 $(1, 1)$ 可以作两条直线与圆 M 相切, C 正确; 对于 D, 圆心 $M(-1, 2)$ 到直线 $4x-3y+5=0$ 的距离 $d = \frac{|4 \times (-1) - 3 \times 2 + 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 1$, 则圆 M 上的点到直线 $4x-3y+5=0$ 的距离的最大值为 $d+r=3$, D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】对于 A, 因为 $A(\frac{a}{16}, 1)$ 在抛物线 C 上, 所以 $\frac{a^2}{16} = 1$, 又 $a > 0$, 解得 $a=4$, 所以 $C: y^2 = 4x$. 故 A 正确; 对于 B, 因为 $B(a, b)$ ($b < 0$) 在抛物线 C 上, 所以 $b^2 = a^2 = 16$, 又 $b < 0$, 解得 $b = -4$. 故 B 正确; 对于 C, $A(\frac{1}{4}, 1), B(4, -4)$, 则以 AB 为直径的圆的圆心为 $(\frac{17}{8}, -\frac{3}{2})$, 半径 $r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{(4-\frac{1}{4})^2 + (-4-1)^2} = \frac{25}{8}$, 所以以 AB 为直径的圆的方程是 $(x-\frac{17}{8})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = (\frac{25}{8})^2$, 即 $(x-\frac{17}{8})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{625}{64}$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $A(\frac{1}{4}, 1), B(4, -4), F(1, 0)$, 所以 $k_{AF} = \frac{1-0}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{4}{3}, k_{BF} = \frac{-4-0}{4-1} = -\frac{4}{3}$, 所以 $k_{AF} = k_{BF}$, 所以 A, F, B 三点共线, 故 D 正确. 故选 ABD.

12. BD 【解析】由题意可设 $g(x) = x^3 f(x)$, 则 $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^2 [3f(x) + x f'(x)]$, 因为 $3f(x) + x f'(x) > 0$, 所以 $x^2 [3f(x) + x f'(x)] \geq 0$, 所以 $g'(x) \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 且 $g'(x)$ 不恒为 0, 所以 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 对于 A, 因为 $x_1 < x_2$, 所以 $g(x_1) < g(x_2)$, 即 $x_1^3 f(x_1) < x_2^3 f(x_2)$, 但不能推得 $\frac{x_1^3}{x_2^3} < \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$, 故 A 错误; 对于 B, 由于 $e^1 > 0$, 所以 $g(e^1) > g(0)$, 即 $(e^1)^3 f(e^1) > 0$, 所以 $e^{3^1} f(e^1) > 0$. 故 B 正确; 对于 C, 假设 $x_1^3 f(x_1^2) = x_2^3 f(x_2^2)$, 则 $g(x_1^2) = g(x_2^2)$, 又 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $x_1^2 = x_2^2$. 因此, 取 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 能使等式成立, 故存在 x_1, x_2 , 使得 $x_1^3 f(x_1^2) = x_2^3 f(x_2^2)$. 故 C 错误; 对于 D, 存在 x_1, x_2 , 使得 $\frac{x_1}{x_2} < 1$ (如 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 满足 $x_1 < x_2$ 且 $\frac{x_1}{x_2} < 1$), 则 $g(\frac{x_1}{x_2}) < g(1)$, 即 $(\frac{x_1}{x_2})^3 f(\frac{x_1}{x_2}) < f(1)$, 即 $\frac{x_1^3}{x_2^3} f(\frac{x_1}{x_2}) < f(1)$. 故 D 正确. 故选 BD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 4 【解析】因为 $b = (1, 2)$, 所以 $|b| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 因为 $|a| = 3$, 所以 $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 = |a|^2 - |b|^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$.

14. 63 【解析】由 $a_1 + a_3 + a_7 + a_9 = 28$, 可得 $a_1 + a_9 = a_3 + a_7 = 14$, 则 $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 63$.

15. 2022 【解析】易知函数 $f(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T = 6$, 而 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = (1-1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + [1 - (-1)] + \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 6$, 由周期性知, 这样连续六项的和均为 6, 而 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023)$ 共有 2023 项, 是 6 的 337 倍再多 1 项, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023) = 337 \times 6 + f(2023) = 2022 + 0 = 2022$.

16. $[-6, -2]$ 【解析】不等式 $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$ 变形为 $ax^3 \geq x^2 - 4x - 3$. 当 $x = 0$ 时, $0 \geq -3$, 故实数 a 的取值范围是 \mathbf{R} ; 当 $x \in (0, 1]$ 时, $a \geq \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$, 记 $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$, $f'(x) = \frac{-x^2 + 8x + 9}{x^4} = \frac{-(x-9)(x+1)}{x^4} > 0$, 故函数 $f(x)$ 单调递增, 则 $f(x)_{\max} = f(1) = -6$, 故 $a \geq -6$; 当 $x \in [-2, 0)$ 时, $a \leq \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$, 记 $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 9$ (舍去), 当 $x \in [-2, -1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)_{\min} = f(-1) = -2$, 则 $a \leq -2$. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-6, -2]$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 因为 $c \sin B \sin C = (a \cos B + 2b - a) \cos C$,
所以 $(a - 2b) \cos C = c(\cos B \cos C - \sin B \sin C)$, (1 分)
所以 $(a - 2b) \cos C = -c \cos(B + C)$,
所以 $(2b - a) \cos C = c \cos A$, (2 分)
所以由正弦定理得 $(2 \sin B - \sin A) \cos C = \sin C \cos A$, (3 分)
所以 $2 \sin B \cos C = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin(A + C) = \sin B$ (4 分)

由于 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 则 $\cos C = \frac{1}{2}$ (5 分)

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$ (6 分)

(2) 由 (1) 得 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,
所以 $ab = 4$, (7 分)

由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a + b)^2 - 3ab = 2ab$ (8 分)

所以 $(a + b)^2 = c^2 + 3ab = 5ab = 20$ (9 分)

所以 $a + b = 2\sqrt{5}$ (10 分)

18. 【解析】(1) 因为 $S_{n+1} = 5S_n + 20$,
所以 $S_3 = 5S_2 + 20, S_2 = 5S_1 + 20$; (1 分)

代入 $S_3 = 620$, 得 $S_2 = 120, S_1 = 20$ (2 分)

因为 $S_{n+1} = 5S_n + 20$,
所以 $S_{n+1} + 5 = 5(S_n + 5), S_1 + 5 = 25$, (3 分)

所以数列 $\{S_n + 5\}$ 是以 25 为首项, 5 为公比的等比数列, (4 分)

所以 $S_n + 5 = 5^{n+1}, S_n = 5^{n+1} - 5$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 5^n - 5$ ②,

由 ① - ② 得 $a_n = 4 \times 5^n$, (6 分)

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 20$ 成立,

所以 $a_n = 4 \times 5^n (n \in \mathbf{N}^+)$ (7 分)

(2)由(1)知 $a_n=4 \times 5^n, b_n=\log_5 \frac{a_n}{4}=n$, (8分)

所以 $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

所以 $\frac{1}{T_n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, (9分)

所以 $\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_n}$

$= 2 \times \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right]$

$= 2 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{2n}{n+1}$ (12分)

19.【解析】(1)在 $Rt\triangle A_1AD$ 与 $Rt\triangle ACE$ 中, $\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{CE}$,

所以 $Rt\triangle A_1AD \sim Rt\triangle ACE$, 所以 $\angle AA_1D = \angle CAE$, (1分)

所以 $\angle AA_1D + \angle A_1DA = \angle CAE + \angle A_1DA = 90^\circ$,

所以 $A_1D \perp AE$ (2分)

因为 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 所以 $AA_1 \perp AB$.

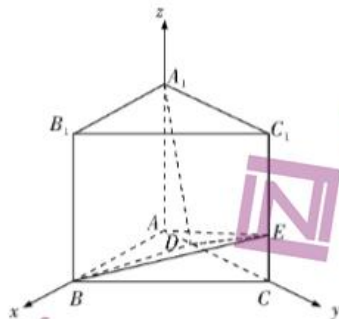
又 $AB \perp AC, AA_1 \cap AC = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 , (3分)

所以 $AB \perp A_1D$ (4分)

又 $AB \cap AE = A$, 所以 $A_1D \perp$ 平面 ABE , (5分)

所以 $A_1D \perp BE$ (6分)

(2)以 AB, AC, AA_1 分别为 x, y, z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系:



则点 $A_1(0,0,3), B(3,0,0), D(0,1,0), E(0,3,1)$, (7分)

则 $\vec{BD} = (-3, 1, 0), \vec{BE} = (-3, 3, 1), \vec{A_1D} = (0, 1, -3)$, (8分)

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BD} = (x, y, z) \cdot (-3, 1, 0) = -3x + y = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{BE} = (x, y, z) \cdot (-3, 3, 1) = -3x + 3y + z = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} y = 3x, \\ z = -6x, \end{cases}$

令 $x=1$, 得平面 BDE 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 3, -6)$ (10分)

设直线 A_1D 与平面 BDE 所成角的大小为 θ , 则

$\sin \theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{A_1D}}{|\vec{n}| |\vec{A_1D}|} \right| = \left| \frac{(1, 3, -6) \cdot (0, 1, -3)}{\sqrt{46} \times \sqrt{10}} \right| = \frac{21\sqrt{115}}{230}$.

故直线 A_1D 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{21\sqrt{115}}{230}$ (12分)

20.【解析】(1)补全的 2×2 列联表如下:

性别	观感情况		总计
	一般	激动	
男性	30	90	120
女性	25	55	80
总计	55	145	200

..... (2分)

零假设为 H_0 : 性别与对活动的观感程度相互独立.

根据表中数据, 计算得到 $\chi^2 = \frac{200(30 \times 55 - 90 \times 25)^2}{55 \times 145 \times 120 \times 80} = \frac{300}{319} < 1 < 2.706$, (4分)

根据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此我们可以认为 H_0 成立, 即认为对该场活动活动的观感程度与性别无关. (5分)

(2) 设一次摸球摸出 2 个红球的事件为 A, 摸出 1 个红球的事件为 B, 没摸出红球的事件为 C, 则 $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} =$

$\frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$, $P(C) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{5}$, (8分)

由题意, X 可取 200, 150, 100, 50, 0.

$P(X=200) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$, $P(X=150) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{25}$,

$P(X=100) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{25}$, $P(X=50) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{25}$,

$P(X=0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$, (10分)

所以 X 的分布列为:

X	200	150	100	50	0
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{25}$

所以 $E(X) = 200 \times \frac{1}{25} + 150 \times \frac{6}{25} + 100 \times \frac{11}{25} + 50 \times \frac{6}{25} + 0 \times \frac{1}{25} = 100$ (12分)

21.【解析】(1) 椭圆 C 的半焦距为 c,

因为 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆的面积为 $\frac{\pi}{3}$,

所以 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆的半径为 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, (2分)

因为 $\triangle BF_1F_2$ 是等边三角形,

所以 $\frac{r}{|OF_2|} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{|OF_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $|OF_2| = 1$, 则 $c = 1$, (4分)

所以 $|F_1F_2| = 2|OF_2| = 2$, 则 $a = |BF_1| = |F_1F_2| = 2$, (5分)

则 $b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (6分)

(2) $|OT| = 4|OF_1| = 4$, 则点 $T(-4, 0)$, (7分)

由题意知直线 MN 的斜率存在且不为 0.



设直线 MN 的方程为 $x=my-4$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

代入椭圆方程, 整理得 $(3m^2+4)y^2-24my+36=0$, (8分)

由 $\Delta=(-24m)^2-4\times 36\times(3m^2+4)>0$, 可得 $m^2>4$.

由韦达定理, 得 $y_1+y_2=\frac{24m}{3m^2+4}$, $y_1y_2=\frac{36}{3m^2+4}$, (9分)

所以 $\triangle MNF_1$ 的面积 $S=|S_{\triangle MNF_1}-S_{\triangle MNF_1}|=\frac{1}{2}|TF_1|\cdot|y_1-y_2|=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$
 $=\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{24m}{3m^2+4}\right)^2-\frac{144}{3m^2+4}}=18\cdot\frac{\sqrt{m^2-4}}{4+3m^2}$
 $=6\times\frac{1}{\frac{m^2-4+\frac{16}{3}}{\sqrt{m^2-4}}}=6\times\frac{1}{\frac{m^2-4+\frac{16}{3}}{\sqrt{m^2-4}}}\leq\frac{6}{2\sqrt{\frac{16}{3}}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, (11分)

当且仅当 $\sqrt{m^2-4}=\frac{\frac{16}{3}}{\sqrt{m^2-4}}$, 即 $m^2=\frac{28}{3}$ 时(此时适合 $m^2>4$ 的条件)取得等号.

故 $\triangle MNF_1$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (12分)

22. 【解析】(1) 因为 $f'(x)=e^{x-1}\cdot e^x$, (1分)

因为 $f(x)$ 在 $(t, f(t))$ 处的切线方程平行于直线 $x-y+1=0$,

所以 $f'(t)=e^{t-1}\cdot e^t=1$, 即 $e^{t-1}\times 1=1$,

解得 $t=1$ (2分)

则 $f(x)=e^{x-1}$, $f(1)=e^{1-1}=1$, (3分)

故 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=x-1$, 即 $x-y=0$ (4分)

(2) 由 $f(x)=x$, 得 $e^{x-t}=x$,

两边同时取对数, 得 $\ln e^{x-t}=\ln x$, 即 $e^{-t}=x$, 得 $e^t=\ln x+t$,

得 $\frac{e^t}{e}=\ln x+t$, 得 $e^t=e(\ln x+t)$,

所以关于 x 的方程 $e^t=e(\ln x+t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数根, (5分)

因为 $x>0$, 所以 $xe^t=e^{t+\ln x}(\ln x+t)$,

令 $g(x)=xe^t(x>0)$, 则 $g'(x)=(x+1)e^t>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

要使 $g(x)=g(\ln x+t)$ 有两个不同的实根, 则需 $x=\ln x+t$ 有两个不同的实根. (7分)

令 $h(x)=x-\ln x-t$, 则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

当 $x\in(0, 1)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1-t$ (8分)

当 $t<1$ 时, $h(x)>0$, $h(x)$ 没有零点;

当 $t=1$ 时, $h(x)\geq 0$, 当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立, $h(x)$ 只有一个零点;

当 $t>1$ 时, $h(1)=1-t<0$, $h(e^{-t})=e^{-t}>0$, $h(e^t)=e^t-2t$ (10分)

令 $\varphi(t)=e^t-2t(t>1)$, 则 $\varphi'(t)=e^t-2>e-2>0$, 即 $\varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=e-2>0$, 即 $h(e^t)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有一个零点, 在 $(1, +\infty)$ 上有一个零点, 符合条件. (11分)

综上, 实数 t 的取值范围是 $(1, +\infty)$ (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

