

成都七中 2022~2023 学年度（上）高三年级半期考试

数 学 试 卷（理科）

（试卷总分：150 分，考试时间：120 分钟）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合 $A=\{1, 2, 4\}$ ， $B=\{1, 3, 5\}$ ，则 $A \cap (\complement_U B)=$ ()

- A. $\{0, 6\}$ B. $\{1, 4\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{3, 5\}$

2. 复数 $z = \frac{4-3i}{2+i}$ (其中 i 为虚数单位) 的虚部为 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

3. 青少年视力被社会普遍关注，为了解他们的视力状况，经统计得到图中右下角 12 名青少年的视力测量值 $a_i (i=1, 2, 3, \dots, 12)$ (五分记录法) 的茎叶图，其中茎表示个位数，叶表示十分位数。如果执行右图所示的算法程序，那么输出的结果是 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

4. 抛物线 $y^2=2px (p \neq 0)$ 上的一点 $P(-9, 12)$ 到其焦点 F 的距离 $|PF|$ 等于 ()

- A. 17 B. 15 C. 13 D. 11

5. 已知一个几何体的三视图如右，则它的表面积为 ()

- A. 3π B. 4π C. 5π D. 6π

6. 在 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中， x^3 项的系数为 ()

- A. -20 B. -15 C. 15 D. 20

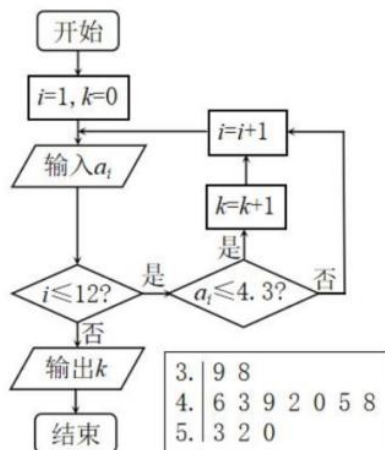
7. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $AD=1$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ， E 是 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} =$ ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

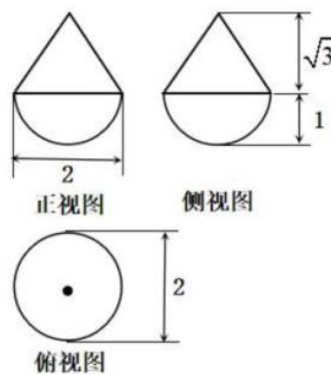
8. “ α 为第二象限角” 是 “ $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha > 1$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

理科数学(第 1 页, 共 4 页)



3.	9 8
4.	6 3 9 2 0 5 8
5.	3 2 0



C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知直线 $ax+by-1=0$ ($a>0, b>0$) 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切, 则 $\log_2 a + \log_2 b$ 的最大值为 ()

A. 3 B. 2 C. -2 D. -3

10. 关于函数 $f(x) = \sin x \cos(x - \frac{\pi}{6})$ 的叙述中, 正确的有 ()

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ; ② $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 内单调递增;

③ $f(x + \frac{\pi}{3})$ 是偶函数; ④ $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称.

A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

11. 攒尖在中国古建筑(如宫殿、坛庙、园林等)中大量存在, 攒尖式建筑的屋面在顶部交汇成宝顶, 使整个屋顶呈棱锥或圆锥形状. 始建于 1752 年的廓如亭(位于北京颐和园内, 如图)是全国最大的攒尖亭宇, 八角重檐, 蔚为壮观. 其檐平面呈正八边形, 上檐边长为 a , 宝顶到上檐平面的距离为 h , 则攒尖坡度(即屋顶斜面与檐平面所成二面角的正切值)为 ()

A. $\frac{(\sqrt{2}+1)h}{2a}$ B. $\frac{3(\sqrt{2}-1)h}{2a}$
C. $\frac{(\sqrt{2}+1)h}{3a}$ D. $\frac{2(\sqrt{2}-1)h}{a}$



12. 如果直线 l 与两条曲线都相切, 则称 l 为这两条曲线的公切线. 如果曲线 $C_1: y = \ln x$ 和曲线 $C_2: y = \frac{x-a}{x}$ ($x>0$) 有且仅有两条公切线, 那么常数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, e)$ D. $(e, +\infty)$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 命题 “ $\exists x \in \mathbb{N}, 2^x < x^2$ ” 的否定是_____.

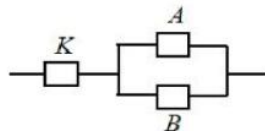
14. 若不等式 $4^x - 2^{a+x} + 2 > 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 且两条渐近线互相垂直, 若 C 上一点 P 满足 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 则 $\angle F_1PF_2$ 的余弦值为_____.

16. 已知某品牌电子元件的使用寿命 X (单位: 天) 服从正态分布 $N(98, 64)$.

(1) 一个该品牌电子元件的使用寿命超过 100 天的概率为_____; (2 分)

(2) 由三个该品牌的电子元件组成的一条电路(如图所示)在 100 天后仍能正常工作(要求 K 能正常工作, A, B 中至少有一个能正常工作, 且每个电子元件能否正常工作相互独立)的概率为_____. (3 分)



(参考公式: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - 0.25\sigma < X \leq \mu + 0.25\sigma) = 0.2$)

理科数学(第 2 页, 共 4 页)

三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个题目考生都必须作答.第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (12分) 已知 $n \in \mathbb{N}^*$, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 且满足下列条件之一: ① $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2^n}$;

② $2na_{n+1} = (n+1)a_n$. (只能从①②中选择一个作为已知)

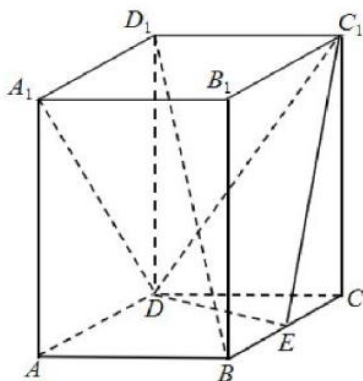
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n < m$, 求正整数 m 的最小值.

18. (12分) 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, E 是 BC 的中点.

(1) 求证: $BD_1 \parallel$ 平面 C_1DE ;

(2) 已知 $\angle ABC=120^\circ$, $AA_1=\sqrt{2}AB$, 求直线 A_1D 与平面 C_1DE 所成角的正弦值.



19. (12分) 某企业有甲、乙两条生产线, 其产量之比为 4:1. 现从两条生产线上按分层抽样的方法得到一个样本, 其部分统计数据如右表(单位:件), 且每件产品都有各自生产线的标记.

产品件数	一等品	二等品	总计
甲生产线		2	
乙生产线	7		
总计			50

(1) 请将 2×2 列联表补充完整, 并根据独立性检验估计: 大约有多大把握认为产品的等级差异与生产线有关?

(2) 为进一步了解产品出现等级差异的原因, 现将样本中所有二等品逐个进行技术检验(随机抽取且不放回). 设甲生产线的两个二等品恰好检验完毕时, 已检验乙生产线二等品的件数为 ξ , 求随机变量 ξ 的分布列及数学期望.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$\text{参考公式: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

理科数学(第3页, 共4页)

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的短轴长为 $2\sqrt{3}$, 左顶点 A 到右焦点 F 的距离为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于不同两点 M, N (不同于 A), 且直线 AM 和 AN 的斜率之积与椭圆的离心率互为相反数, 求 F 在 l 上的射影 H 的轨迹方程.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - k \sin x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内存在极值点 α .

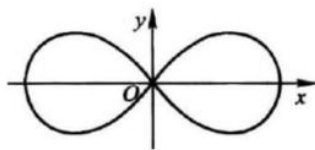
(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 求证: 在区间 $(0, \pi)$ 内存在唯一的 β , 使 $f(\beta) = 1$, 并比较 β 与 2α 的大小.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答. 如果多做, 那么按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 伯努利双纽线 C (如图) 的普通方程为 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (其中 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, t 为参数).



(1) 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 求 C 和 l 的极坐标方程;

(2) 设 A, B 是 C 与 x 轴的交点, M, N 是 C 与 l 的交点 (四点均不同于 O), 当 α 变化时, 求四边形 $AMBN$ 的最大面积.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设 M 为不等式 $|x+1| + 4 \geq |3x-1|$ 的解集.

(1) 求 M ;

(2) 若 $a, b \in M$, 求 $|ab - a - b|$ 的最大值.

成都七中 2022~2023 学年度(上) 半期考试高三数学试题

参考答案及评分意见(理科)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分) CAB C BADA DCDB

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13、 $\forall x \in \mathbb{N}, 2^x \geq x^2$; 14、 $(-\infty, \frac{3}{2})$; 15、 $\frac{1}{3}$; 16、0.4 (2 分); 0.256 (3 分).

三、解答题:(共 70 分)

17、解:(1)若选择条件①,则由已知得 $2^{n+1} \cdot a_{n+1} = 2^n \cdot a_n + 2$. (2 分)

所以 $\{2^n \cdot a_n\}$ 是首项为 2,公差为 2 的等差数列,故 $2^n \cdot a_n = 2n$. (4 分)

于是 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$. (5 分)

或解:若选择条件①,则由已知得 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{(n+1)-n}{2^n}$,于是 $a_{n+1} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{n}{2^{n-1}})$. (2 分)

又 $a_1 - \frac{1}{2^0} = 0$,所以 $\{a_n - \frac{n}{2^{n-1}}\}$ 为常数数列 $\{0\}$. (4 分)

于是 $a_n - \frac{n}{2^{n-1}} = 0$,故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$. (5 分)

若选择条件②,则由已知得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{n}$. (2 分)

所以 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 是首项为 1,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,故 $\frac{a_n}{n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. (4 分)

于是 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$. (5 分)

或解:若选择条件②,则由已知得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$. (2 分)

于是 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} \cdot 1 = \frac{n}{2^{n-1}}$. (4 分)

于是 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$. (5 分)

(注:如果选择两个条件作答,则以第一个计分;若两个条件同时使用,则不计分)

(2) 因为 $S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}}$,

所以 $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$. (6 分)

两式错位相减,得 $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$ (7 分)

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$
 (9 分)

高三(上)半期考试数学(理科)参考答案(第 1 页,共 4 页)

于是 $S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} < 4$ ($n \in \mathbb{N}^*$). (10分)

又因为 $S_4 = \frac{13}{4} > 3$, 所以正整数 m 的最小值为 4. (12分)

18、(1) 证明: 连结 CD_1 交 DC_1 于点 F , 连结 EF . (1分)

由已知, 易得 F 是 CD_1 的中点. (2分)

因为 E 是 BC 的中点, 所以 $EF \parallel BD_1$. (3分)

因为 $BD_1 \not\subset$ 平面 C_1DE , 且 $EF \subset$ 平面 C_1DE , (4分)

$\therefore BD_1 \parallel$ 平面 C_1DE . (5分)

(2) 解: 由已知可得, $\triangle BCD$ 为正三角形, (6分)

所以 $DE \perp BC$, 于是 $DE \perp AD$. (7分)

以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 为坐标轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$, 并设 $AB=2$. (8分)

则 $D(0, 0, 0)$, $A_1(2, 0, 2\sqrt{2})$, $E(0, \sqrt{3}, 0)$, $C_1(-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$. (9分)

于是 $\overrightarrow{DE} = (0, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{DC_1} = (-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2\sqrt{2})$. (10分)

由 $\begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases}$ 得平面 C_1DE 的一个法向量 $\vec{n} = (2\sqrt{2}, 0, 1)$. (11分)

所以 $\cos \langle \overrightarrow{DA_1}, \vec{n} \rangle = \frac{4\sqrt{2} + 0 + 2\sqrt{2}}{3 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. (12分)

故直线 A_1D 与平面 C_1DE 所成角 α 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (12分)

19、解: (1) 由题意, 补充完整的 2×2 列联表如下.

产品件数	一等品	二等品	总计
甲生产线	38	2	40
乙生产线	7	3	10
总计	45	5	50

(3分, 每两空给1分)

于是 $K^2 = \frac{50(38 \times 3 - 7 \times 2)^2}{45 \times 5 \times 40 \times 10} = \frac{50}{9} \approx 5.556$. (5分)

因为 $5.556 \in (5.024, 6.635)$, 所以大约有 98% 的把握认为产品的等级差异与生产线有关. (6分)

(注: 位于区间 [97.5%, 99%] 内均可给分)

(2) 随机变量 ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 则 (10分, 各1分)

$P(\xi=0) = \frac{A_2^2}{A_5^2} = \frac{1}{10}$, $P(\xi=1) = \frac{C_2^1 A_2^2 A_3^1}{A_5^3} = \frac{1}{5}$,

$P(\xi=2) = \frac{C_3^1 A_2^2 A_3^2}{A_5^4} = \frac{3}{10}$, $P(\xi=3) = \frac{C_4^1 A_2^2 A_3^3}{A_5^5} = \frac{2}{5}$.

故随机变量 ξ 的分布列如右.

(11分)

ξ	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.3	0.4

随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 = 2$ (件).

(12分)

20、解: (1) 设椭圆 C 的半焦距为 c , 由已知, $a+c=3$. (1分)

高三(上)半期考试数学(理科)参考答案 (第2页, 共4页)



又 $b = \sqrt{3}$, 所以 $a^2 - c^2 = 3$. (2 分)

解得 $a=2, c=1$. 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (3 分)

椭圆 C 的离心率 $e = \frac{1}{2}$. (4 分)

(2) 当直线 l 垂直于 y 轴时, 直线 AM, AN 的斜率乘积为正, 与已知矛盾. (5 分)

故可设 l 的方程为 $x = ty + m (m \neq -2)$, 代入 $3x^2 + 4y^2 = 12$, 并整理得 $(3t^2 + 4)y^2 + 6mty + 3(m^2 - 4) = 0$. (6 分)

设 $M(ty_1 + m, y_1), N(ty_2 + m, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-6mt}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{3(m^2 - 4)}{3t^2 + 4}$. (※) (7 分)

因为 $A(-2, 0)$, 由 $k_{AM} \cdot k_{AN} = -\frac{1}{2}$, 得 $\frac{y_1 y_2}{(ty_1 + m + 2)(ty_2 + m + 2)} = -\frac{1}{2}$. (8 分)

整理得 $(t^2 + 2)y_1 y_2 + (m + 2)t(y_1 + y_2) + (m + 2)^2 = 0$. (8 分)

将(※)式代入, 得 $3(m^2 - 4)(t^2 + 2) - 6m(m + 2)t^2 + (m + 2)^2(3t^2 + 4) = 0$.

因为 $m \neq -2$, 化简得 $3(m - 2)(t^2 + 2) - 6mt^2 + (m + 2)(3t^2 + 4) = 0$. (9 分)

化简得 $3(m - 2) + 2(m + 2)t^2 = 0$, 解得 $m = \frac{2}{5}$ (此时 $\Delta > 0$ 恒成立), 所以直线 l 经过定点 $P(\frac{2}{5}, 0)$. (10 分)

又因为 $PH \perp FH$, 所以 H 的轨迹是以 PF 为直径的圆 (除去点 F). (11 分)

故点 H 的轨迹方程为 $(x - \frac{7}{10})^2 + y^2 = \frac{9}{100} (x \neq 1)$. (12 分)

(说明: 未注明除去点 F 和 $x \neq 1$, 整体只扣 1 分)

21、解: (1) 求导, 得 $f'(x) = e^x - k \cos x$. (1 分)

① 当 $k \leq 1$ 时, 因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 于是 $k \cos x \leq \cos x < 1$, 所以 $f'(x) > 1 - k \cos x > 0$. (2 分)

此时 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增, 故 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无极值点. (3 分)

② 当 $k > 1$ 时, 易知 $f'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增. (4 分)

又 $f'(0) = 1 - k < 0, f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$, 所以存在唯一的 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\alpha) = 0$. (5 分)

综上所述, 所求实数 k 的取值范围是 $(1, +\infty)$. (6 分)

或解: 求导, 得 $f'(x) = e^x - k \cos x$. (1 分)

由 $f'(x) = 0$, 得 $\frac{1}{k} = \frac{\cos x}{e^x}$ (显然 $k \neq 0$). (2 分)

设函数 $k(x) = \frac{\cos x}{e^x} (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 则 $k'(x) = \frac{-(\sin x + \cos x)}{e^x} < 0$. (3 分)

所以 $k(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减. (4 分)

又 $k(0) = 1, k(\frac{\pi}{2}) = 0$, 故 $0 < \frac{1}{k} < 1$. (5 分)

于是所求实数 k 的取值范围是 $(1, +\infty)$. (6 分)

(2) 由 (1) 知, 当 $0 < x < \alpha$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $\alpha < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) > 0$. (7 分)

又当 $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \alpha)$ 内单调递减, 在区间 (α, π) 内单调递增. (8 分)

故当 $0 < x \leq \alpha$ 时, $f(x) < f(0) = 1$ 恒成立. 又 $f(\pi) = e^\pi > 1$,

所以在区间 $(0, \pi)$ 内存在唯一的 β , 使得 $f(\beta) = 1$, 且 $\beta \in (\alpha, \pi)$. (9 分)

由 $f'(\alpha) = 0$, 得 $k \cos \alpha = e^\alpha$, 所以 $f(2\alpha) = e^{2\alpha} - 2k \sin \alpha \cos \alpha = e^\alpha (e^\alpha - 2 \sin \alpha)$. (10 分)

设函数 $g(\alpha) = e^\alpha - e^{-\alpha} - 2 \sin \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 则 $g'(\alpha) = e^\alpha + e^{-\alpha} - 2 \cos \alpha > 2 - 2 \cos \alpha > 0$.

所以 $g(\alpha)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增, 故 $g(\alpha) > g(0) = 0$, 即 $e^\alpha - 2 \sin \alpha > e^{-\alpha}$, 于是 $f(2\alpha) > 1$. (11 分)

又 $f(\beta) = 1$, 所以 $f(2\alpha) > f(\beta)$. 因为 $f(x)$ 在区间 (α, π) 内单调递增, 且 $2\alpha, \beta \in (\alpha, \pi)$, 所以 $2\alpha > \beta$. (12 分)

22、解: (1) 由 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ 得 $\rho^4 = 2(\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta)$. (1 分)

于是 $\rho^2 = 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$, 所以 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$. (2 分)

由直线 l 的参数方程可知, l 经过坐标原点 O , 且倾斜角为 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$), (3 分)

所以 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$). (4 分)

(2) 易知曲线 C 关于点 O 对称, 所以四边形 $AMBN$ 为平行四边形. (5 分)

又 $|OA| = \sqrt{2}$, $|OM| = \sqrt{2 \cos 2\alpha}$, 其中 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$. (6 分)

所以 $\square AMBN$ 的面积 $S = 4S_{\triangle OAM} = 2|OA| \cdot |OM| \sin \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sqrt{\cos 2\alpha}$. (7 分)

于是 $S = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \sin^2 \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)} \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{2 \sin^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{2} = \sqrt{2}$. (9 分)

故四边形 $AMBN$ 的最大面积为 $\sqrt{2}$ (当且仅当 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ 即 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时取得). (10 分)

23、解: (1) 当 $x < -1$ 时, 原不等式化为 $-(x+1)+4 \geq -(3x-1)$, 得 $x > -1$, 此时无解; (1 分)

当 $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ 时, 原不等式化为 $(x+1)+4 \geq -(3x-1)$, 得 $x \geq -1$, 故 $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$; (2 分)

当 $x > \frac{1}{3}$ 时, 原不等式化为 $(x+1)+4 \geq 3x-1$, 得 $x \leq 3$, 故 $\frac{1}{3} < x \leq 3$; (3 分)

所以原不等式的解集 $M = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$. (4 分)

(2) 因为 $a, b \in M$, 所以 $|a-1| \leq 2$, $|b-1| \leq 2$. (5 分)

所以 $|ab-a-b| = |(a-1)(b-1)-1| \leq |(a-1)(b-1)|+1$ (7 分)

$= |a-1| \cdot |b-1| + 1 \leq 2 \times 2 + 1 = 5$. (9 分)

故 $|ab-a-b|$ 的最大值为 5 (当且仅当 $a=3, b=-1$, 或 $a=-1, b=3$ 时取得). (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



微信



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw