漳州市2023届高三毕业班第三次质量检测
数学　答案详解

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	A	C	B	D	C	C	BCD	ABC	AD	BCD

1. A 【命题意图】本题考查一元二次不等式及绝对值不等式的解法、集合的并集运算,考查运算求解能力,考查数学运算核心素养.

【解题思路】$x^2-2x-8<0$,即$(x-4)(x+2)<0$,解得$-2<x<4$;$|x-3|<2$,即$-2<x-3<2$,解得$1<x<5$,则$A\cup B=\{x|-2<x<5\}$,故选A.

2. C 【命题意图】本题考查共轭复数、复数的模,考查运算求解能力,考查数学运算核心素养.

【解题思路】依题意,设复数$z=a+b\mathrm{i}(a<0,b>0)$,由$z=\overline{z}^2$,得$a+b\mathrm{i}=(a^2-b^2)-2ab\mathrm{i}$,则$\begin{cases}a=a^2-b^2,\\b=-2ab,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$所以$|z|=1$,故选C.

3. A 【命题意图】本题考查等比数列的性质,考查运算求解能力,考查数学运算核心素养.

【解题思路】因为数列$\{a_n\}$为递减的等比数列,$a_2a_7=32$,所以$a_3a_6=32$. 又$a_3+a_6=18$,所以$a_3=16$,$a_6=2$,所以等比数列$\{a_n\}$的公比为$\sqrt[3]{\dfrac{a_6}{a_3}}=\dfrac{1}{2}$,故选A.

4. C 【命题意图】本题考查函数模型的实际应用,考查运算求解能力和抽象概括能力,考查数学运算核心素养.

【解题思路】由题意得$50=10+(90-10)\mathrm{e}^{-10k}$,解得$k=\dfrac{\ln2}{10}$. 当$\theta=20$时,可得$20=10+(90-10)\mathrm{e}^{-\frac{\ln2}{10}t}$,解得$t=30$,故选C.

5. B 【命题意图】本题考查三角函数的诱导公式、三角恒等变换,考查运算求解能力,考查数学运算核心素养.

【解题思路】$\sin\left(2\alpha+\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]=\cos\left[2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=1-2\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{4}$,故选B.

6. D 【命题意图】本题考查双曲线的定义和几何性质、基本不等式,考查推理论证能力、运算求解能力,考查逻辑推理及数学运算核心素养.

【解题思路】依题意,不妨设点P在第一象限,双曲线C的右焦点为F_2,连接PF_2,根据对称性可知$|PF_2|=|F_1Q|$,$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$,设$|PF_1|=m(m>0)$,$|PF_2|=n(n>0)$,则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{F_1Q}|\cos\dfrac{\pi}{3}=4$,即$mn=8$. 在$\triangle F_1PF_2$中,由余弦定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\dfrac{\pi}{3}=|F_1F_2|^2$,即$m^2+n^2-mn=4c^2$. 又因为$m-n=2a$,所以$(m-n)^2+mn=4c^2$,即$4a^2+8=4c^2$,所以$b^2=2$,则$\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{2}{a^2}\geqslant2\sqrt{\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{2}{a^2}}=2$,当且仅当$\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{2}{a^2}$,即$a^2=2$时,等号成立,此时$c^2=a^2+b^2=4$,所以双曲线$C$的离心率为$\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$,故选D.

7. C 【命题意图】本题考查正三棱锥的外接球、二面角,考查空间想象能力、运算求解能力,考查直观想象及数学运算核心素养.

【解题思路】依题意,不妨设O为$\triangle ABC$的中心,$\triangle ABC$的边长为a,取AB中点D,连接CD,PD,PO,则$CD\perp BD$,$PO\perp CD$,$PO\perp AB$,则$\angle PDO$即为二面角$P-AB-C$的平面角,即$\angle PDO=\dfrac{\pi}{3}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle PDO$中,$OD=\dfrac{1}{3}CD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$,$\angle PDO=\dfrac{\pi}{3}$,则$PO=OD\times\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\times\sqrt{3}=\dfrac{a}{2}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle PCO$中,$PC=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$,$PO=\dfrac{a}{2}$,$OC=\dfrac{2}{3}CD=$

$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$PC^2=PO^2+OC^2$，即$\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$，解得$a=3$(舍负).设正三棱锥$P-ABC$的外接球的球心为$E$，半径为$R$，则$E\in PO$，设$EO=|x|$，连接$BE,BO$，则$BE=PE=R$.又$BO^2+EO^2=BE^2$，即$\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\right)^2+x^2=\left(\frac{3}{2}-x\right)^2$，解得$x=-\frac{1}{4}$，即$E$在$PO$的延长线上，且$OE=\frac{1}{4}$，所以$R=PE=PO+OE=\frac{7}{4}$，所以三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为$4\pi\times\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49\pi}{4}$，故选C.

8. C 【命题意图】本题考查函数的零点、利用导数研究函数的单调性、最值，考查运算求解能力、推理论证能力和抽象概括能力，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】依题意，$f(x_0)=2x_0+\ln x_0+1-a=0$ ①，$g(x_0)=x_0-\frac{a}{e^{2x_0}}=0$ ②，联立①②得$x_0e^{2x_0}-2x_0-\ln x_0-1=0$，令$h(x)=xe^{2x}-2x-\ln x-1(x>0)$，则$h'(x)=(2x+1)\left(e^{2x}-\frac{1}{x}\right)(x>0)$，令$y=e^{2x}-\frac{1}{x}$，则$y$在$(0,+\infty)$上单调递增，且当$x=\frac{1}{4}$时，$y=\sqrt{e}-4<0$，当$x=1$时，$y=e^2-1>0$，根据零点存在定理，可知函数$y=e^{2x}-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上存在唯一的零点$t$，且$t\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，则$e^{2t}-\frac{1}{t}=0$，即$e^{2t}=t^{-1}$，所以$2t=-\ln t$.当$x\in(0,t)$时，$h'(x)<0$，函数$h(x)$在$(0,t)$上单调递减；当$x\in(t,+\infty)$时，$h'(x)>0$，函数$h(x)$在$(t,+\infty)$上单调递增，所以函数$h(x)$在$x=t$处取得最小值$h(t)=te^{2t}-2t-\ln t-1=0$.又$x_0e^{2x_0}-2x_0-\ln x_0-1=0$，即$x_0=t$，所以$e^{2x_0}\ln x_0^2=2e^{2x_0}\ln x_0=2\cdot\frac{1}{x_0}\cdot(-2x_0)=-4$，故选C.

9. BCD 【命题意图】本题考查统计图表，考查数据处理能力，考查数据分析核心素养.

【解题思路】由图中数据可知，甲校第2次考试成绩的平均分低于乙校的平均分，所以A选项不正确；由图可知甲校六次平均分相对集中，因此方差会更小，所以B选项正确；$6\times25\%=1.5$，将甲校成绩按从小到大的顺序排序，第2个成绩为甲校成绩的第25百分位数，估计值为90分；$6\times75\%=4.5$，将乙校成绩按从小到大的顺序排序，第5个成绩为乙校成绩的第75百分位数，估计值超过90分，所以C选项正确；甲校六次平均分的极差明显小于乙校六次平均分的极差，所以D选项正确，故选BCD.

10. ABC 【命题意图】本题考查空间中线面间的位置关系、三棱锥的体积、异面直线所成角，考查空间想象能力、推理论证能力，考查直观想象及逻辑推理核心素养.

【解题思路】对于A选项，连接$AP,AB_1,AC,A_1D,A_1C_1,C_1D$，因为$A_1D/\!/B_1C$，$A_1D\not\subset$平面$AB_1C$，$B_1C\subset$平面$AB_1C$，所以$A_1D/\!/$平面$AB_1C$，同理$A_1C_1/\!/$平面$AB_1C$.又$A_1D\cap A_1C_1=A_1$，所以平面$AB_1C/\!/$平面$A_1C_1D$.因为$AP\subset$平面$AB_1C$，所以$AP/\!/$平面$A_1C_1D$，故A选项正确；对于B选项，在正方体中，易得$B_1D\perp AC$，$B_1D\perp AD_1$，且$AD_1\cap AC=A$，所以$B_1D\perp$平面$ACD_1$，故B选项正确；对于C选项，因为$A_1D/\!/B_1C$，$A_1D\subset$平面$A_1C_1D$，所以$B_1C/\!/$平面$A_1C_1D$，所以$B_1C$上任一点到平面$A_1C_1D$的距离均相等，所以三棱锥$P-A_1C_1D$的体积为定值，即三棱锥$C_1-PDA_1$的体积为定值，故C选项正确；对于D选项，因为$A_1D/\!/B_1C$，所以异面直线$AP$与$A_1D$所成的角，即为直线$AP$与$B_1C$所成的角或其补角.在$\triangle AB_1C$中，点$P$在线段$B_1C$上运动，当点$P$运动到$B_1C$的中点时，$AP\perp B_1C$；当点$P$运动到与点$B_1$或点$C$重合时，$\angle AB_1C,\angle ACB_1$均为$\frac{\pi}{3}$，所以异面直线$AP$与$A_1D$所成角的取值范围为$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，故D选项错误，故选ABC.

11. AD 【命题意图】本题考查三角恒等变换、正弦函数的图象与性质，考查推理论证能力、运算求解能力，考查逻辑推理及数学运算核心素养.

【解题思路】由题意可得 $f(x)=\sin\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}+\cos^2\frac{\omega x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sin\omega x+\cos\omega x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$.因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right]$.又因为函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上有且仅有4条对称轴,所以$\frac{7\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{2}$,解得$\frac{13}{4}\leqslant\omega<\frac{17}{4}$,故A选项正确;对于B选项,若$\pi$是$f(x)$的最小正周期,则$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得$\omega=2\notin\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$,故B选项错误;对于C选项,因为$x\in\left(-\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{16}\right)$,所以$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\omega\pi}{16}+\frac{\pi}{4},\frac{\omega\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\right)$.又$\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$,所以$\frac{\omega\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{29\pi}{64},\frac{33\pi}{64}\right)$,$-\frac{\omega\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{64},\frac{3\pi}{64}\right]$.因为$\frac{33\pi}{64}>\frac{\pi}{2}$,所以函数$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{16}\right)$上可能不是单调递增的,故C选项错误;对于D选项,因为$x\in(0,\pi)$,所以$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$,又$\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$,所以$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right)$,当$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{2},4\pi\right)$时,$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有3个不同的零点;当$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left(4\pi,\frac{9\pi}{2}\right)$时,$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有4个不同的零点,故D选项正确,故选AD.

12. BCD **【命题意图】**本题考查数列的递推关系和数列的求和与放缩,考查推理论证能力和运算求解能力,考查逻辑推理和数学运算核心素养.

【解题思路】依题意,当$n=1$时,$a_2a_1^2=a_1-a_2$,即$a_1^2-2a_1+1=0$,解得$a_1=1$,而$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1}$,所以$a_3=\frac{a_2}{a_2^2+1}=\frac{2}{5}$,$a_4=\frac{a_3}{a_3^2+1}=\frac{10}{29}$,所以$a_4-a_1=\frac{10}{29}-1=-\frac{19}{29}$,所以A选项不正确;因为$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1}$,且$a_1=1$,$a_n^2+1>1$,所以$a_n>0$,$0<\frac{1}{a_n^2+1}<1$,则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{a_n^2+1}<1$,所以$a_{n+1}<a_n$,所以数列$\{a_n\}$为单调递减数列,所以$a_n$的最大值为$a_1=1$,所以B选项正确;由$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1}$,得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n^2+1}{a_n}=a_n+\frac{1}{a_n}$,$a_n>0$,所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=a_n$,所以$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=a_1$,$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=a_2$,$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}=a_3$,…,$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=a_n$,累加得$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.因为数列$\{a_n\}$为单调递减数列,且$a_1=1$,所以$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant n\cdot a_1=n$,即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}\leqslant n$,即$\frac{1}{a_{n+1}}\leqslant n+1$,$a_{n+1}\geqslant\frac{1}{n+1}$,所以C选项正确;由上述可得$a_n\geqslant\frac{1}{n}$,所以$\sqrt{a_n}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,所以$\sqrt{a_n}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.当$n\geqslant2$时,数列$\{\sqrt{a_n}\}$的前$n$项和$S_n=\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\cdots+\sqrt{a_n}>2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]=2(\sqrt{n+1}-1)$,当$n=35$时,$S_{35}>10$,所以D选项正确,故选BCD.

13. $-\frac{3}{4}$ **【命题意图】**本题考查奇函数的性质、分段函数,考查运算求解能力,考查数学运算核心素养.

【解题思路】当$x\in(0,1]$时,$f(x)=x^2-x$,则$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$,当$x\in(1,2]$时,$f(x)=x-1$,又$f(x)$为奇函数,所以$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}$,$f(0)=0$,所以$f\left(-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+0=-\frac{3}{4}$.

14. 240 **【命题意图】**本题考查二项展开式系数,考查运算求解能力,考查数学运算核心素养.

【解题思路】$C_5^2(x^2)^2\cdot C_3^2(-2y)^2\cdot C_1^1 2^1=240x^4y^2$,即$x^4y^2$项的系数为240.

15. $\left(1,\frac{17}{9}\right)$ **【命题意图】**本题考查平面向量的线性运算、二次函数的性质,考查运算求解能力、推理论证能

力，考查数学运算及逻辑推理核心素养.

【解题思路】由题可设 $\overrightarrow{CE}=m\overrightarrow{CD}$，$m\in(0,1)$. 因为 $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{m}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\left(1+\frac{m}{3}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{m}{3}\overrightarrow{AB}$. 又 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\begin{cases}\lambda=-\frac{m}{3},\\ \mu=1+\frac{m}{3},\end{cases}$ 所以 $\lambda^2+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-2\lambda\mu=1+\frac{2}{3}m+\frac{2}{9}m^2=\frac{2}{9}\left[\left(m+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+1$. 又因为 $m\in(0,1)$，由二次函数的性质得 $y=\frac{2}{9}\left[\left(m+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+1\in\left(1,\frac{17}{9}\right)$，所以 $\lambda^2+\mu^2$ 的取值范围是 $\left(1,\frac{17}{9}\right)$.

16. 2　5　**【命题意图】**本题考查椭圆的几何性质和标准方程，考查推理论证能力和运算求解能力，考查逻辑推理和数学运算核心素养.

【解题思路】依题意得 $2a=4$，则 $a=2$. 又离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{4-3}=1$，则椭圆 C 的短轴长 $2b=2$，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 设 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(2\cos\beta,\sin\beta)$. 又 $k_{OP}=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}$，$k_{OQ}=\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}$，则 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}\times\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}=-\frac{1}{4}$，整理得 $4(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=0$，即 $\cos(\alpha-\beta)=0$，不妨设 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$，则 $|OP|^2+|OQ|^2=4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+4\cos^2\beta+\sin^2\beta=5$.

17. **【命题意图】**本题考查等差数列的通项公式与前 n 项和公式、裂项相消法求和，考查推理论证能力和运算求解能力，考查逻辑推理和数学运算核心素养.

【名师指导】（Ⅰ）由等差数列的通项公式及前 n 项和公式列方程组即可求解；（Ⅱ）由（Ⅰ）求得 $\{b_n\}$ 的通项，再利用裂项相消法求和即可求解.

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，依题意可得 $\begin{cases}3(a_1+d)-(a_1+4d)=6,\\ 6a_1+\frac{6\times5}{2}d=54,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=4,\\ d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2n+2$.　（5 分）

（Ⅱ）因为 $\frac{(n+3)b_n}{2}=\frac{1}{a_n}$，

由（Ⅰ）得 $\frac{(n+3)b_n}{2}=\frac{1}{2(n+1)}$，

所以 $b_n=\frac{1}{(n+3)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$.

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2+3}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5n^2+13n}{12(n+2)(n+3)}$.　（10 分）

18. **【命题意图】**本题考查正弦定理、余弦定理及其推论，考查推理论证能力和运算求解能力，考查逻辑推理和数学运算核心素养.

【名师指导】（Ⅰ）由已知条件结合正弦定理求出角 B，D，再利用余弦定理的推论求出 AB，最后将四边形 $ABCD$ 的面积转化为 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$ 即可求解；（Ⅱ）由余弦定理结合基本不等式，求得 $AB+BC$ 的最大值，进而得到△ABC 周长的最大值.

解：（Ⅰ）因为 $AC=7$，圆 O 的半径为 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$，

则有 $\frac{AC}{\sin B}=2\times\frac{7\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为平面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，

所以 $B+D=\pi$.

又 $B>D$，

所以 $B=\frac{2\pi}{3}$，$D=\frac{\pi}{3}$，

又 $AD=CD$，

所以△ACD 为正三角形.

在△ABC 中，$BC=5$，$AC=7$，$B=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理的推论可得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=-\frac{1}{2}$，

整理得 $AB^2+5AB-24=0$,

解得 $AB=3$,$AB=-8$(舍去),

所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 7^2=16\sqrt{3}$. (6 分)

(Ⅱ)在△ABC 中,$AC=7$,$B=\frac{2\pi}{3}$,

由余弦定理得 $AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=AC^2=49$,

即 $AB^2+BC^2+AB\cdot BC=49$,

则 $(AB+BC)^2=49+AB\cdot BC\leqslant 49+\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2$,

当且仅当 $AB=BC$ 时,等号成立,解得 $\frac{3}{4}(AB+BC)^2\leqslant 49$,

即 $0<AB+BC\leqslant\frac{14\sqrt{3}}{3}$,

所以△ABC 周长的最大值为 $\frac{14\sqrt{3}}{3}+7$. (12 分)

19.**【命题意图】**本题考查空间中直线与平面间的位置关系、点到平面的距离、二面角,考查空间想象能力和运算求解能力,考查直观想象和数学运算核心素养.

【名师指导】(Ⅰ)通过等体积法,即 $V_{D-BC_1G}=V_{C_1-BDG}=V_{C-BDG}$,即可求解;或连接 AC,BD,交于点 O,以 O 为坐标原点,建立合适的空间直角坐标系,求出 $\overrightarrow{DB}$ 及平面 BC_1G 的一个法向量,即可求解;(Ⅱ)以 O 为坐标原点建立合适的空间直角坐标系,分别求得平面 AEC 和平面 BEC 的一个法向量,再利用空间向量的夹角公式即可求解.

解:(Ⅰ)解法一:如图,连接 AC,BD 交于点 O,连接 BC_1,BG.

因为 $DD_1=3$,$DG=2$,

所以 $D_1G=1$.

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$,

所以△ABD,△BCD 均为正三角形,则 $CO=\sqrt{3}$,$BC_1=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,$GC_1=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,$BG=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

所以 $BC_1^2=GC_1^2+BG^2$,

则 $BG\perp GC_1$,

所以 $S_{\triangle BC_1G}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{10}$,$S_{\triangle BDG}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

因为 $GD\perp$ 平面 $ABCD$,$CO\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $GD\perp CO$.

又 $BD\perp CO$,$GD\cap BD=D$,GD,$BD\subset$ 平面 GBD,

所以 $CO\perp$ 平面 GBD.

又 $CC_1/\!/GD$,$GD\subset$ 平面 GBD,$CC_1\not\subset$ 平面 GBD,

所以 $CC_1/\!/$平面 GBD,

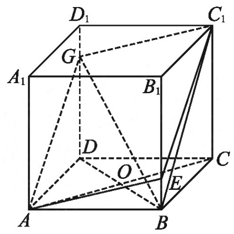
即点 C_1 和点 C 到平面 GBD 的距离相等.

设点 D 到平面 BC_1G 的距离为 d,

则 $V_{D-BC_1G}=V_{C_1-BDG}=V_{C-BDG}$,

即 $\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle BC_1G}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle BDG}$,

即 $d=\frac{CO\cdot S_{\triangle BDG}}{S_{\triangle BC_1G}}=\frac{\sqrt{3}\times 2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$. (6 分)



解法二:如图,连接 AC,BD 交于点 O,以 O 为坐标原点,OA 所在直线为 x 轴,OB 所在直线为 y 轴,过点 O 作平行于 CC_1 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $D(0,-1,0)$,$B(0,1,0)$,$C_1(-\sqrt{3},0,3)$,$G(0,-1,2)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-\sqrt{3},-1,3)$,$\overrightarrow{BG}=(0,-2,2)$,$\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$.

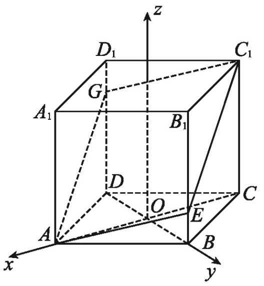
设平面 BC_1G 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y+3z=0,\\-2y+2z=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},1,1\right)$,

所以点 D 到平面 BC_1G 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.

(6 分)



(Ⅱ)以 O 为坐标原点,OA 所在直线为 x 轴,OB 所在直线为 y 轴,过点 O 作平行于 CC_1 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系,由题易知,$BE=D_1G=1$,

则 $A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,$E(0,1,1)$,

$\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},1,1)$,$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$.

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x_1=0,\\ \sqrt{3}x_1+y_1+z_1=0,\end{cases}$

不妨取 $y_1=1$,得 $\boldsymbol{u}=(0,1,-1)$.

设平面 BEC 的法向量为 $\boldsymbol{v}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_2-y_2=0,\\ \sqrt{3}x_2+y_2+z_2=0,\end{cases}$

不妨取 $y_2=1$,得 $\boldsymbol{v}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$,

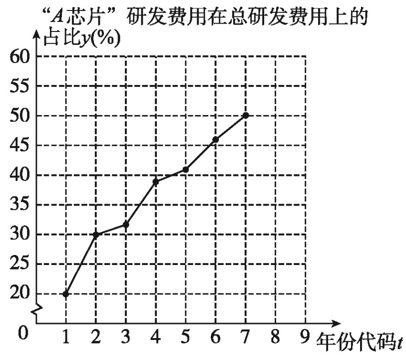
所以 $|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{4}{3}}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

所以平面 AEC 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. (12 分)

20.【名师指导】本题考查相关系数、线性回归方程,考查数据处理能力,考查数据分析核心素养.

(Ⅰ)根据表中数据画出折线图,由公式计算出相关系数并判断相关性即可;(Ⅱ)由公式计算出 $\hat{b}$,再由 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$ 计算出 $\hat{a}$ 即可;(Ⅲ)找出 2024 年对应的年份代码 t,代入(Ⅱ)中的回归方程即可得到"A 芯片"研发费用占比,即可预测 2024 年用在"A 芯片"上的研发费用,从而作出判断.

解:(Ⅰ)根据表中数据作出折线图如图所示:



由题意得,$\overline{t}=\frac{1}{7}\times(1+2+3+4+5+6+7)=4$,

则 $\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$,

故 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2}=2\sqrt{7}$,

故 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}}$

$\approx\frac{132}{2\sqrt{7}\times25.34}$

≈0.98,

$\because|0.98|>0.8$,

$\therefore y$ 与 t 高度相关,即 y 与 t 的线性相关很强. (6 分)

(Ⅱ)根据题意,得

$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{132}{28}\approx4.7$,

$\therefore\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}\approx\frac{259}{7}-4.7\times4=18.2$,

$\therefore y$ 关于 t 的回归直线方程为 $\hat{y}=4.7t+18.2$. (9 分)

(Ⅲ)符合研发要求.

2024 年对应的年份代码 $t=9$,

当 $t=9$ 时,$\hat{y}=4.7\times9+18.2=60.5$,

$\therefore$预测 2024 年用在"A 芯片"上的研发费用约为 $500\times60.5\%=302.5$(万元).

又 302.5>295，∴符合研发要求. （12 分）

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的单调性、不等式恒成立问题，考查抽象概括能力、推理论证能力和运算求解能力，考查逻辑推理、数学运算核心素养.

【名师指导】（Ⅰ）利用导数研究出函数在区间内的单调性，即可得证；（Ⅱ）将原问题进行转化，构造新函数，将不等式恒成立问题转化为函数最值问题，利用导数求出新函数的最值，即可证明.

证明：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x-e^x+\ln x(x>0)$，

$f'(x)=1-e^x+\dfrac{1}{x}(x>0)$.

令 $p(x)=f'(x)=1-e^x+\dfrac{1}{x}(x>0)$，

则 $p'(x)=-e^x-\dfrac{1}{x^2}<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以函数 $f'(x)=1-e^x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又因为 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\sqrt{e}+2>0$，$f'(1)=2-e<0$，

所以函数 $f'(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上存在唯一的零点 x_0，且

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减.

综上，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是单调函数. （6 分）

（Ⅱ）依题意，要证当 $a\in(0,e)$ 时，$f(x)<0$ 对任意的 $x\in(0,1)$ 恒成立，

即证 $ax-e^x+\dfrac{\ln x}{a}<0$ 对任意的 $x\in(0,1)$ 恒成立，

即证 $\ln x<ae^x-a^2x$ 对任意的 $x\in(0,1)$ 恒成立.

令函数 $h(x)=ae^x-a^2x$，$x\in(0,1)$，

则 $h'(x)=ae^x-a^2=a(e^x-a)$.

因为 $x\in(0,1)$，所以 $e^x\in(1,e)$.

当 $a\in(0,1]$ 时，$h'(x)=a(e^x-a)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $h(x)>h(0)=a>0$；

当 $a\in(1,e)$ 时，令 $h'(x)=a(e^x-a)=0$，解得 $x=\ln a$，

当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减；

当 $x\in(\ln a,1)$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 在 $(\ln a,1)$ 上单调递增，

则函数 $h(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得最小值 $h(\ln a)=a^2(1-\ln a)>0$.

综上，当 $a\in(0,e)$ 时，函数 $h(x)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

令函数 $g(x)=\ln x$，

因为 $g(x)=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=0$，即函数 $g(x)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

综上可得，当 $a\in(0,e)$ 时，$g(x)<h(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，即 $\ln x<ae^x-a^2x$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，

所以当 $a\in(0,e)$ 时，$f(x)<0$ 对任意的 $x\in(0,1)$ 恒成立. （12 分）

22.【命题意图】本题考查椭圆和抛物线的标准方程、直线与圆锥曲线的位置关系，考查推理论证能力和运算求解能力，考查逻辑推理和数学运算核心素养.

【名师指导】（Ⅰ）依题意列方程组，即可求出椭圆方程，再求出椭圆的左顶点，结合题中条件即可求出 p，从而求出抛物线方程；（Ⅱ）（ⅰ）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立直线与抛物线的方程，消元，利用韦达定理列出 y_1y_2，y_1+y_2，设出切线方程并联立，求得点 S 的坐标，再利用两点间的距离公式求出各基本量，即可得证；（ⅱ）假设在 x 轴上存在点 $T(x_0,0)$，使得直线 MT，NT 的倾斜角互补，则直线 MT，NT 的斜率之和为 0，设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，联立直线与椭圆的方程，消元，利用韦达定理求出 x_3+x_4 和 x_3x_4，再结合题中条件列出等式，化简并求解即可求出 x_0 的值.

解：（Ⅰ）依题意，设椭圆 C 的方程为 $\lambda x^2+\mu y^2=1$ $(\lambda\neq\mu,\lambda>0,\mu>0)$，

则有 $\begin{cases}3\lambda+8\mu=1,\\6\lambda+4\mu=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{9},\\\mu=\dfrac{1}{12},\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$,

则椭圆 C 的左顶点坐标为$(-3,0)$.

又抛物线 Γ 的焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$,

则$\frac{p}{2}-(-3)=4$,

解得 $p=2$,

所以抛物线 Γ 的方程为 $y^2=4x$. (4 分)

(Ⅱ)(ⅰ)证明:当 $m=k$ 时,直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$,

即 $x=\frac{1}{k}y-1$,

令$\frac{1}{k}=n$,则直线 l 的方程为 $x=ny-1$.

设点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=ny-1,\\ y^2=4x,\end{cases}$

消去 x 整理得 $y^2-4ny+4=0$,

$\Delta=16n^2-16>0$,

则 $y_1+y_2=4n$,$y_1y_2=4$.

设抛物线 Γ 在点 P,Q 处的切线方程分别为 $x=n_1(y-y_1)+x_1$,$x=n_2(y-y_2)+x_2$,

联立$\begin{cases}x=n_1(y-y_1)+x_1,\\ y^2=4x,\end{cases}$

消去 x 得 $y^2-4n_1y+4n_1y_1-4x_1=0$.

因为 $x=n_1(y-y_1)+x_1$ 为抛物线 Γ 的切线,

所以 $\Delta_1=16n_1^2-16n_1y_1+16x_1=0$.

又 $y_1^2=4x_1$,则 $4y_1^2=16x_1$,

则 $16n_1^2-16n_1y_1+4y_1^2=4(2n_1-y_1)^2=0$,

可得 $2n_1=y_1$,

同理可得 $2n_2=y_2$.

联立两切线方程$\begin{cases}x=n_1(y-y_1)+x_1,\\ x=n_2(y-y_2)+x_2,\end{cases}$

将 $2n_1=y_1$,$2n_2=y_2$ 代入,

解得$\begin{cases}x=\frac{y_1y_2}{4}=1,\\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=2n,\end{cases}$

所以 $S(1,2n)$,

则$|SP|^2=(x_1-1)^2+(y_1-2n)^2$.

又 $x_1=ny_1-1$,

所以$|SP|^2=(ny_1-2)^2+(y_1-2n)^2=(n^2+1)y_1^2-8ny_1+4n^2+4$,

同理$|SQ|^2=(n^2+1)y_2^2-8ny_2+4n^2+4$.

因为$\frac{|PF|}{|QF|}=\frac{x_1+1}{x_2+1}=\frac{ny_1-1+1}{ny_2-1+1}=\frac{y_1}{y_2}$,

则$|PF|\cdot|SQ|^2=|QF|\cdot|SP|^2$ 等价于 $y_1\cdot|SQ|^2=y_2\cdot|SP|^2$.

又 $y_1|SQ|^2=(n^2+1)y_1y_2^2-8ny_1y_2+4(n^2+1)y_1$,

$y_1y_2=4$,

所以 $y_1|SQ|^2=4(n^2+1)(y_1+y_2)-32n$,

同理 $y_2|SP|^2=4(n^2+1)(y_1+y_2)-32n$,

所以 $y_1\cdot|SQ|^2=y_2\cdot|SP|^2$,

即$|PF|\cdot|SQ|^2=|QF||SP|^2$. (8 分)

(ⅱ)当 $m=-2k$ 时,直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$.

假设存在点 $T(x_0,0)$,使得直线 MT,NT 的倾斜角互补,则直线 MT,NT 的斜率之和为 0.

设 $M(x_3,y_3)$,$N(x_4,y_4)$,

联立$\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3k^2+4)x^2-12k^2x+12k^2-36=0$,

所以 $\Delta_2=(12k^2)^2-4(3k^2+4)(12k^2-36)>0$,

即 $5k^2+12>0$ 恒成立,

所以 $x_3+x_4=\frac{12k^2}{3k^2+4}$,$x_3x_4=\frac{12k^2-36}{3k^2+4}$.

因为$\frac{y_3}{x_3-x_0}+\frac{y_4}{x_4-x_0}=0$,

所以 $k(x_3-2)(x_4-x_0)+k(x_4-2)(x_3-x_0)=0$,

即 $2x_3x_4-(x_0+2)(x_3+x_4)+4x_0=0$,

所以$\frac{24k^2-72}{3k^2+4}-(x_0+2)\frac{12k^2}{3k^2+4}+4x_0=0$,

所以$\frac{16x_0-72}{3k^2+4}=0$,

解得 $x_0=\frac{9}{2}$,

假设成立,所以存在定点 $T\left(\frac{9}{2},0\right)$,使得直线 MT,NT 的倾斜角互补. (12 分)

关于我们