

保密★启用前

广东省 2022 届高三综合能力测试 (二)

数学试题

2021 年 12 月

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生要务必填写答题卷上的有关项目.
2. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卷各题目指定区域内; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液, 不按以上要求作答的答案无效.
4. 请考生保持答题卷的整洁, 考试结束后, 将答题卷交回.

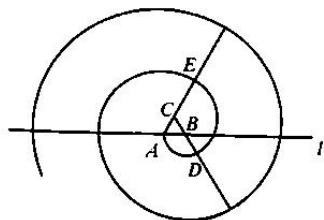
第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题意要求的.

1. 已知集合 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | 2^n \leq 33\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集个数为 ()
A. 4 B. 6 C. 7 D. 8
2. 若复数 z 满足 $(3+4i)z = |3+4i|$, 则复平面内表示 z 的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 DC 的中点, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()
A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1
4. 某地对生活垃圾使用填埋和环保两种方式处理, 该地 2020 年产生的生活垃圾为 20 万吨, 其中 15 万吨以填埋方式处理, 5 万吨以环保方式处理. 预计每年生活垃圾的总量比前一年增加 1 万吨. 同时, 因垃圾处理技术越来越进步, 要求从 2021 年起每年通过环保方式处理的生活垃圾量是前一年的 q 倍, 若要使得 2024 年通过填埋方式处理的生活垃圾量不高于当年生活垃圾总量的 50%, 则 q 的值至少为 ()
A. $\sqrt[3]{2.4}$ B. $\sqrt{2.5}$ C. $\sqrt[3]{2.4}$ D. $\sqrt[3]{2.5}$
5. 函数 $y = \log_2(4^x + 16^x) - 3x$ 的图象 ()
A. 关于原点对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于直线 $x = 2$ 对称 D. 关于点 $(0, 1)$ 对称
6. 下雨天开车, 由于道路条件变差, 司机的视线受阻, 会给交通安全带来很大的影响. 交警统计了某个路口 300 天的天气和交通情况, 300 天中有 90 天下雨, 有 50 天发生了交通事故, 其中有 30 天既下雨又发生了交通事故, 则估计该路口“下雨天发生交通事故的概率”是“非雨天发生交通事故概率”的 ()
A. 1.5 倍 B. 2.5 倍 C. 3.5 倍 D. 4.5 倍

数学试题 第 1 页 (共 4 页)

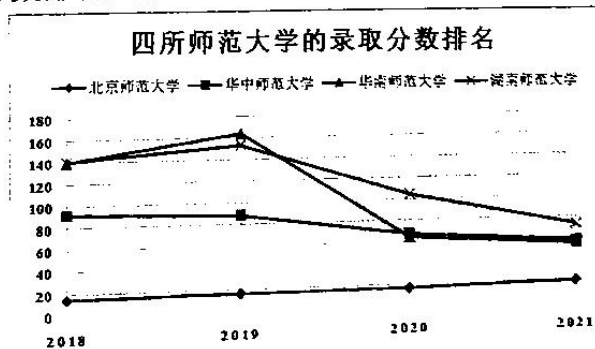
7. 某数学兴趣小组设计了一种螺线，作法如下：在水平直线 l 上取长度为1的线段 AB ，并作等边三角形 ABC ，然后以点 B 为圆心， BA 为半径逆时针画圆弧，交线段 CB 的延长线于点 D ；再以点 C 为圆心， CD 为半径逆时针画圆弧，交线段 AC 的延长线于点 E ，以此类推，得到的螺线如图所示。当螺线与直线 l 有6个交点（不含 A 点）时，则螺线长度最小值为（ ）



- A. 30π B. $\frac{100\pi}{3}$ C. $\frac{110\pi}{3}$ D. 40π
8. 已知异面直线 a, b 所成的角为 60° ，其公垂线段 MN 的长度为2，长度为4的线段 PQ 的两端点分别在直线 a, b 上运动，则 PQ 中点的轨迹为（ ）
（注：公垂线段指与异面直线垂直且相交的线段）
- A. 直线 B. 圆 C. 椭圆 D. 双曲线

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 近年来，报考教师资格证的人数越来越多，教师行业逐渐升温。下图给出了近四年四所师范院校的录取分数排名，则（ ）



- A. 近四年北京师范大学录取分数排名变化最不明显
B. 近四年湖南师范大学录取分数排名的平均值最大
C. 近四年华南师范大学录取分数排名的极差值最大
D. 近四年华中师范大学的生源质量呈现下降的趋势
10. 设 α 是给定的平面， A, B 是不在 α 内的任意两点，则（ ）
- A. 在 α 内存在直线与直线 AB 平行 B. 在 α 内存在直线与直线 AB 相交
C. 在 α 内存在直线与直线 AB 垂直 D. 存在过直线 AB 的平面与 α 垂直

11. 已知 $f(x) = \sin(2x + \varphi) + \cos 2x$, 则 ()
- A. $\forall \varphi \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $\forall \varphi \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leq 2$
- C. $\exists \varphi \in (0, \pi)$, 使得 $f(x)$ 为偶函数 D. $\exists \varphi \in (0, \pi)$, 使得 $f(x)$ 为奇函数
12. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, $a_{n+1} - a_n \in \{1, 3, 5\}$, $S_k = 100$, 则 k 可以等于 ()
- A. 8 B. 9 C. 11 D. 12

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}})^6$ 展开式的第 3 项为_____.
14. 已知 $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, 则 $\cos 108^\circ =$ _____.
15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $k \in \mathbf{R}$, 直线 $l_1: x + ky = 0$ 与直线 $l_2: kx - y - 2k + 1 = 0$ 交于点 P . 圆 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 则 $|PO| \cdot |PC|$ 的最大值为_____.
16. 已知函数 $f(x) = 4x^3 + ax + b$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $|f(x)| \leq 1$ 恒成立, 则 $a + b =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某商场在双十一期间举办线下优惠活动, 顾客购买一件不低于 100 元的商品就有资格参加一次抽奖活动, 中奖能享受当件商品五折优惠. 活动规则如下: 抽奖箱中装有大小质地完全相同的 10 个球, 分别编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 购物者在箱中摸两个球, 球的编号之和为 11 视为中奖, 其余情况不中奖.

(1) 求抽奖活动中奖的概率;

(2) 某顾客准备分别购买两件原价为 200 元、300 元的商品, 依次参加了两次抽奖活动, 求总付款额的分布列.

18. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, a_1 是 a_2, a_3 的等差中项, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 q ;

(2) 证明: 数列 $\{S_n\}$ 中的任意连续三项按适当顺序排列后, 可以成等差数列.

19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 边长均为正整数, 且 $b=4$.

- (1) 若角 B 为钝角, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
- (2) 若 $A=2B$, 求 a .

20. (12分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 AA_1C_1C 是边长为4的正方形. 再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知, 并作答.

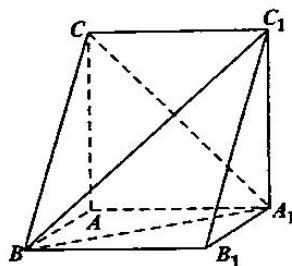
- (1) 求证: $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C ;
- (2) 求直线 BC_1 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.

条件①: $BC = BA_1 = 2\sqrt{5}$;

条件②: $BC_1 \perp A_1C$;

条件③: 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C .

注: 如果选择多种方案分别解答, 那么按第一种方案解答计分.



21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F 为左焦点, 上顶点 P 到 F 的距离为2, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 设斜率为 k 的动直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 且 $|PM| = |PN|$, 求 k 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x} - ax^2$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x) \geq 2\cos x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

广东省 2022 届高三综合能力测试 (二)

数 学 参 考 答 案 与 评 分 标 准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	B	C	A	C

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ABC	CD	BC	ABD

三、填空题：本大共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。

13. $\frac{15}{4}x$ 14. $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 15. $\frac{5}{2}$ 16. $\frac{1}{4}$

三、解答题：本大题共 6 小题，满分 70 分。解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】(1) 用 x, y 表示两个球的编号，则样本点可以用 (x, y) 表示，.....1 分
 样本空间 $\Omega = \{(x, y) | x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, x < y\}$ ， $n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$ ，.....2 分
 设事件 $A =$ “顾客能中奖”， $A = \{(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)\}$ ， $n(A) = 5$ ，.....3 分
 所以 $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$ 。.....4 分

(2) 设总付款额为 X ，则 X 的所有取值为：250, 350, 400, 500，.....5 分
 设事件 $A_1 =$ “购买 200 元商品时中奖”，事件 $A_2 =$ “购买 300 元商品时中奖”，.....6 分
 $P(A_1) = P(A_2) = P(A) = \frac{1}{9}$ ， A_1 与 A_2 相互独立，则.....7 分

$$P(X = 250) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}, \quad P(X = 350) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = \frac{8}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{81},$$

$$P(X = 400) = P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{81}, \quad P(X = 500) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{81},$$

所以总付款额 X 的分布列为：

X	250	350	400	500
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{64}{81}$

.....10 分

18. 【解析】(1) 由题得 $2a_1 = a_2 + a_3$ ，则 $2a_1 = a_1q + a_1q^2$ ，.....2 分
 因为 $a_1 \neq 0$ ，所以 $q^2 + q - 2 = 0$ ，解得 $q = 1$ (舍去) 或 $q = -2$ 。
 所以公比 $q = -2$ 。.....4 分

(2) 由题意， $S_n = \frac{a_1[1 - (-2)^n]}{1 - (-2)} = \frac{a_1}{3} \cdot [1 - (-2)^n]$ ，.....5 分
 当 $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ 时， $S_n = S_{2k+1} = \frac{a_1}{3} \cdot (1 + 2^{2k+1})$ ；
 当 $n = 2k + 2, k \in \mathbb{N}$ 时， $S_n = S_{2k+2} = \frac{a_1}{3} \cdot (1 - 2^{2k+2})$ 。.....7 分

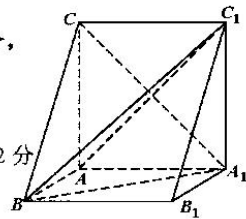
当数列 $\{S_n\}$ 中的连续三项为 $S_{2k+1} = \frac{a_1}{3}(1+2^{2k+1})$, $S_{2k+2} = \frac{a_1}{3}(1-2^{2k+2})$, $S_{2k+3} = \frac{a_1}{3}(1+2^{2k+3})$,
 由 $1-2^{2k+2}+1+2^{2k+3} = 2+2^{2k+1}(2^2-2) = 2(1+2^{2k+1})$, 可得 $S_{2k+2}, S_{2k+1}, S_{2k+3}$ 成等差数列; 9分
 当数列 $\{S_n\}$ 中的连续三项为 $S_{2k+2} = \frac{a_1}{3}(1-2^{2k+2})$, $S_{2k+3} = \frac{a_1}{3}(1+2^{2k+3})$, $S_{2k+4} = \frac{a_1}{3}(1-2^{2k+4})$,
 由 $1-2^{2k+4}+1+2^{2k+3} = 2-2^{2k+2}(2^2-2) = 2(1-2^{2k+2})$, 可得 $S_{2k+4}, S_{2k+3}, S_{2k+2}$ 成等差数列; 11分
 综上, 数列 $\{S_n\}$ 中的任意连续三项按适当顺序排列后, 可以成等差数列; 12分
 另解: 由题意, $S_n = \frac{a_1[1-(-2)^n]}{1+2} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^n]$; 5分
 则 $S_{n+1} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+1}]$, $S_{n+2} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+2}]$; 7分
 从而 $S_{n+1}+S_{n+2} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+1}] + \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+2}] = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+1}+1-(-2)^{n+2}]$
 $= \frac{a_1}{3} \cdot [2-(-2)^{n+1}(1-2)] = \frac{a_1}{3} \cdot [2+(-2)^{n+1}] = 2 \cdot \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^n] = 2S_n$; 10分
 则 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 或 S_{n+2}, S_n, S_{n+1} 成等差数列; 11分
 所以数列 $\{S_n\}$ 中的任意连续三项按适当顺序排列后, 可以成等差数列; 12分

19. 【解析】(1) 由角 B 为钝角, 则 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} < 0$, 即 $a^2+c^2 < 16$; 1分
 又因为 $a+c > 4$, 即 $\begin{cases} a^2+c^2 < 16 \\ a+c > 4 \end{cases}$, 且 $a, c \in \mathbf{N}^*$, 因此 $\begin{cases} a=2 \\ c=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=3 \\ c=2 \end{cases}$ 符合题意; 2分
 故 $\cos B = \frac{13-16}{12} = -\frac{1}{4}$, 则 $\sin B = \sqrt{1-(-\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$; 4分
 因此 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$; 5分
 (2) 由 $A=2B$, 得 $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B$, 由正弦定理, 可得 $a = 2b \cos B$; 6分
 由余弦定理, 得 $a = 2b \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, 因为 $b=4$, 则 $a^2(c-4) = 4(c^2-16)$; 7分
 若 $c=4$, 则 $B=C$, 故 $\begin{cases} A=2B \\ B=C \\ A+B+C=\pi \end{cases}$, 则 $B=C = \frac{\pi}{4}$, $A = \frac{\pi}{2}$, 此时 $a = 4\sqrt{2}$, 不符合题意; 9分
 所以 $c \neq 4$, 由 $a^2(c-4) = 4(c^2-16)$, 得 $a = 2\sqrt{c+4}$, 又 $c-a > 0$, 即 $c-a > 2\sqrt{c+4}$, 则 $0 < c < 2$.
 因为 $a, c \in \mathbf{N}^*$, 故当 $c=5$ 时, 有 $a=6$, 而 $b=4$, 故能构成三角形, 故 $a=6$; 12分

20. 【解析】若选择条件①②: 则不能解决两个问题, 本题得分为 0 分.

若选择条件②③: 则可以解决 (1) 问, 不能解决 (2) 问, (2) 问得分为 0 分,
 (1) 问按下面标准给分.

(1) 因为平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , 平面 $ABC \cap$ 平面 $AA_1C_1C = AC$,
 $AA_1 \perp AC$, 所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 又 $AB \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp AB$ 2分
 连接 AC_1 , 则 $A_1C \perp AC_1$, 又 $BC_1 \perp A_1C$, $AC_1 \cap BC_1 = C_1$,



所以 $A_1C \perp$ 平面 ABC_1 , 又 $AB \subset$ 平面 ABC_1 , 则 $A_1C \perp AB$5分
又 $A_1C \cap AA_1 = A_1$, 所以 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C6分

若选择条件①③: 则可以解决两个问题, 按下面标准给分.

(1) 因为平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , 平面 $ABC \cap$ 平面 $AA_1C_1C = AC$, $AA_1 \perp AC$,
所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC . 又 $AB \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp AB$2分

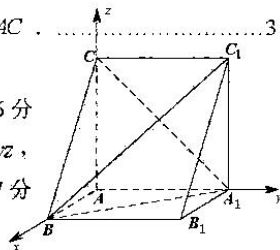
因为 $\begin{cases} BC = BA_1 \\ AC = AA_1 \\ AB = AB \end{cases}$, 所以 $\triangle ABC \cong \triangle BA_1A$, 则 $\angle BAC = \angle BAA_1$, 即 $AB \perp AC$3分

又 $AC \cap AA_1 = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C6分

(2) 由(1)和题设, 可以点 A 为原点, 如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$,
且 $AB = 2$7分

则 $B(2,0,0)$, $C(0,0,4)$, $A_1(0,4,0)$, $C_1(0,4,4)$,

所以 $\overrightarrow{BC} = (-2,0,4)$, $\overrightarrow{BA_1} = (-2,4,0)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-2,4,4)$9分



设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x + 4z = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = -2x + 4y = 0 \end{cases}$, 可取 $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$11分

设直线 BC_1 与平面 A_1BC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{\|\mathbf{n}\| \|\overrightarrow{BC_1}\|} = \frac{4}{6 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$12分

若选择条件①②③: 则本题得分为 0 分.

21. 【解析】(1) 由上顶点 P 到 F 的距离为 2, 可得 $a = 2$,1分

又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $c = \sqrt{3}$, 从而 $b = 1$3分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$4分

(2) 当 $k = 0$ 时, 由椭圆的对称性, 显然成立.5分

当 $k \neq 0$ 时, 设直线 l 为 $y = kx + m$, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 得 $(4k^2 + 1)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0$,6分

则 $\Delta = 64m^2k^2 - 16(4k^2 + 1)(m^2 - 1) > 0$, 即 $4k^2 - m^2 + 1 > 0$ (*),7分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{4k^2 + 1}$,

$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = -\frac{8mk^2}{4k^2 + 1} + 2m = \frac{2m}{4k^2 + 1}$,8分

故线段 MN 的中点为 $Q(\frac{-4mk}{4k^2 + 1}, \frac{m}{4k^2 + 1})$, 从而直线 PQ 的斜率为 $k_{PQ} = \frac{\frac{m}{4k^2 + 1} - 1}{\frac{-4mk}{4k^2 + 1}} = \frac{m - 4k^2 - 1}{-4mk}$,9分

由 $|PM| = |PN|$, 得 $PQ \perp MN$, 即 $k_{PQ} \cdot k = -1$, 即 $\frac{m - 4k^2 - 1}{-4m} = -1$, 故 $m = -\frac{4k^2 + 1}{3}$10分

由(*)式, 即 $4k^2 - m^2 + 1 > 0$, 可得 $4k^2 + 1 - \frac{(4k^2 + 1)^2}{9} > 0$, 即 $\frac{(4k^2 + 1)(8 - 4k^2)}{9} > 0$,
故 $8 - 4k^2 > 0$, 解得 $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$, 且 $k \neq 0$11分
综上所述, k 的取值范围为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$12分

22. 【解析】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$, $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$,1分
令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号,
因此, $g(x)$ 是增函数, 即 $f'(x)$ 是增函数.2分
又因为 $f'(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$3分
所以 $f(x)$ 的递增区间为 $(0, +\infty)$, 递减区间为 $(-\infty, 0)$4分

(2) 由(1)可知, $e^x + e^{-x} - x^2 \geq 2$, 令 $F(x) = f(x) - 2\cos x$, 则 $F'(x) = e^x - e^{-x} - 2ax + 2\sin x$,
令 $h(x) = F'(x)$, 则 $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2a + 2\cos x$,5分
①当 $a \leq 2$ 时, $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2a + 2\cos x \geq x^2 + 2\cos x - 2$,6分
令 $\varphi(x) = x^2 + 2\cos x - 2$, 则 $\varphi'(x) = 2x - 2\sin x$, 令 $p(x) = \varphi'(x)$, 则 $p'(x) = 2 - 2\cos x \geq 0$,
因此 $p(x)$ 是增函数, 即 $\varphi'(x)$ 是增函数.
又因为 $\varphi'(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时, $\varphi'(x) < 0$,
则 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.
于是, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$7分

进而有 $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 是增函数, 即 $F'(x)$ 是增函数,
又因为 $F'(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时, $F'(x) < 0$,
则 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.
于是, $F(x) \geq F(0) = 0$, 符合题意.8分

②当 $a > 2$ 时, $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2a + 2\cos x \leq e^x + e^{-x} - 2a + 2$,9分
因为当 $0 < x < \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a})$ 时, $e^x + e^{-x} - 2a + 2 < 0$,
所以 $h(x)$ 即 $F'(x)$ 在 $(0, \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a}))$ 上是减函数,10分
则当 $0 < x < \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a})$ 时, $F'(x) < F'(0) = 0$, 进而 $F(x)$ 在 $(0, \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a}))$ 上是减函数,
于是, 当 $0 < x < \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a})$ 时, $F(x) < F(0) = 0$, 不合题意.11分
综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$12分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

