

惠州市 2023 届高三第三次调研考试试题

数 学

全卷满分 150 分，时间 120 分钟。

2022.12

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号、座位号、学校、班级等考生信息填写在答题卡上。

2. 作答单项及多项选择题时，选出每个小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，写在本试卷上无效。

3. 非选择题必须用黑色字迹签字笔作答，答案必须写在答题卡各题指定的位置上，写在本试卷上无效。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题满分 5 分，共 40 分。

在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，选对得 5 分，选错得 0 分。

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \left\{1, \frac{1}{x}\right\}$ ，且 $B \subseteq A$ ，则实数 $x =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ 或 1 D. 0

2. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， a_4 、 a_{2019} 是方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的两个根，

则 $\{a_n\}$ 的前 2022 项和为 ()

- A. 1011 B. 2022 C. 4044 D. 8088

3. “ $m > 2$ ”是“方程 $\frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线”的 () 条件

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知实数 $a > b > 0 > c$ ，则下列结论一定正确的是 ()

- A. $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^c$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{c}$ D. $a^2 > c^2$

5. 已知互不重合的三个平面 α 、 β 、 γ ，其中 $\alpha \cap \beta = a$ ， $\beta \cap \gamma = b$ ， $\gamma \cap \alpha = c$ ，

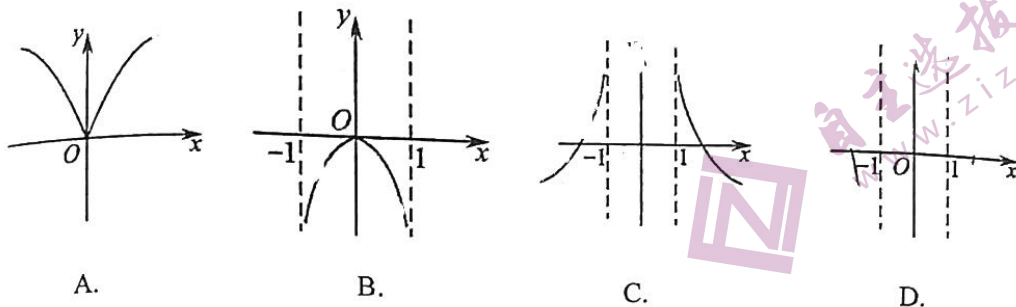
且 $a \cap b = P$ ，则下列结论一定成立的是 ()

- A. b 与 c 是异面直线 B. a 与 c 没有公共点 C. $b \parallel c$ D. $b \cap c = P$

数学试题

第 1 页，共 6 页

6. 若函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 R 上为减函数, 则函数 $y = \log_a(|x| - 1)$ 的图象可以是 ()



7. 在“2, 3, 5, 7, 11, 13”这 6 个素数中, 任取 2 个不同的数, 这两数之和仍为素数的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

8. 已知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $ax < \sin x < bx$ 恒成立, 则 $b - a$ 的最小值为 ()

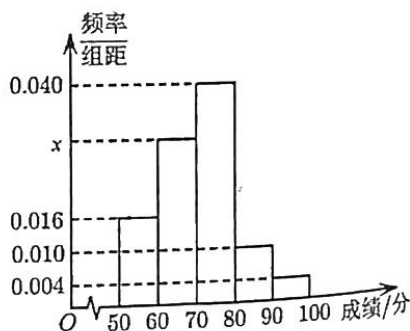
- A. 1 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{2} - 1$ D. $1 - \frac{2}{\pi}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题满分 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知复数 $z = \frac{-1+i}{i}$, 则下列选项正确的是 ()

- A. z 的虚部为 1 B. $|z| = 2$
C. z^2 为纯虚数 D. \bar{z} 在复平面内对应的点位于第一象限

10. 在全市高三年级举行的一次数学达标测试中, 共有 20000 人参加考试。为了了解本次考试学生成绩情况, 从中抽取了部分学生的成绩 (成绩均为正整数, 满分为 100 分) 作为样本进行统计, 样本容量为 n . 按照 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 的分组作出频率分



布直方图如图所示，其中成绩落在区间 $[50, 60)$ 内的人数为16.

则下列结论正确的是 ()

- A. 样本容量 $n=1000$
- B. 频率分布直方图中 $x=0.030$
- C. 估计该市全体学生成绩的平均分约为 70.6 分
- D. 该市要对成绩由高到低前 20% 的学生授予“优秀学生”称号，则成绩为 78 分的学生肯定能得到此称号

11. 已知函数 $f(x) = 3^x - 2^x$, $x \in \mathbf{R}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
- B. 存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得函数 $y = \frac{f(x)}{a^x}$ 为奇函数
- C. 任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > -1$
- D. 函数 $g(x) = f(x) + x$ 有且仅有 2 个零点

12. 画法几何的创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：若椭圆的两条切线互相垂直，则两切线的交点位于一个与椭圆同中心的圆上，称此圆为该椭圆的蒙日圆. 已知

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点，

点 A 在椭圆上，直线 $l: bx + ay - a^2 - b^2 = 0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 直线 l 与蒙日圆相切
- B. 椭圆 C 的蒙日圆的方程为 $x^2 + y^2 = 2a^2$
- C. 记点 A 到直线 l 的距离为 d , 则 $d - |AF_2|$ 的最小值为 $\frac{(4\sqrt{3} - 6\sqrt{2})b}{3}$
- D. 若矩形 $MNGH$ 的四条边均与 C 相切，则矩形 $MNGH$ 的面积的最大值为 $8b^2$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分，其中16题第一个空2分，第二个空3分。

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (-2, 4)$, $\vec{b} = (\lambda, 1)$, 若 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直, 则实数 $\lambda =$ _____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 θ 的终边经过点 $(1, 2)$, 则 $\cos^2\theta + \sin 2\theta =$ _____.

15. 在圆 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 内, 过点 $E(0, 3)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD ,

则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____.

16. 用数学的眼光看世界就能发现数学之“美”. 现代建筑讲究线条感, 曲线之美让人称奇. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率, 曲线的曲率定义如下: 若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率为

$$K = \frac{|f''(x)|}{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}. \text{ 则曲线 } f(x) = \sqrt{x} \text{ 在 } (1, 1) \text{ 处的曲率为 } \underline{\hspace{2cm}};$$

正弦曲线 $g(x) = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 曲率的平方 K^2 的最大值为 _____.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分10分) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;

(2) 若 $b_n = a_n + n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分12分)

$$\text{条件① } a \cos B = c + \frac{1}{2}b, \quad \text{条件② } \frac{\sin A - \sin C}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{a + c},$$

$$\text{条件③ } \sqrt{3}b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B.$$

请从上述三个条件中任选一个, 补充在下列问题中, 并解答.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 _____,

(1) 求 A ;

(2) 若 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $AD = 1$, 求 $2b + c$ 的最小值.

(注: 如选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分)

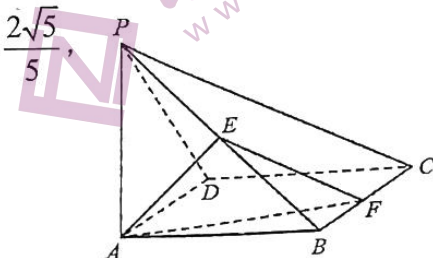
19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB = 2$, E 为线段 PB 的中点, F 为线段 BC 上的动点.

(1) 证明: 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若直线 AF 与平面 PAB 所成的角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

求点 P 到平面 AEF 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位: m^2) 和材积量 (单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 0.2474$.

(1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;

(2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);

(3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186m^2$. 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2x - a \ln x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x) \geq (a+2)x - xe^x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $A(-2, 0)$ 在椭圆上且

$|AF| = 3$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 P 、 Q 分别在椭圆 C 和直线 $x = 4$ 上, $OQ \parallel AP$, M 为 AP 的中点, 若 T 为直线 OM 与直线 QF 的交点, 是否存在一个确定的曲线, 使得 T 始终在该曲线上? 若存在, 求出该曲线的轨迹方程; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线