

景德镇市 2023 届高三第三次质检试题

数 学 (理科)

命题 景德镇一中 江宁 黄卓颖 景德镇二中 余敏 乐平中学 徐新新

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

第 I 卷 (选择题)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{y | y = \sin x\}$, $B = \{y | y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $[0, +\infty)$ B. \emptyset C. $[0, 1]$ D. $[-1, 1]$

2. 若向量 $\vec{a} = (2, -1)$ 与向量 $\vec{b} = (1, 3)$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta =$

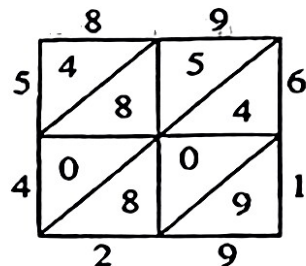
- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 满足函数 $f(x) = \ln(mx+3)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减的充要条件是

- A. $-4 < m < -2$ B. $-3 < m < -1$ C. $-4 < m < 0$ D. $-3 < m < 0$

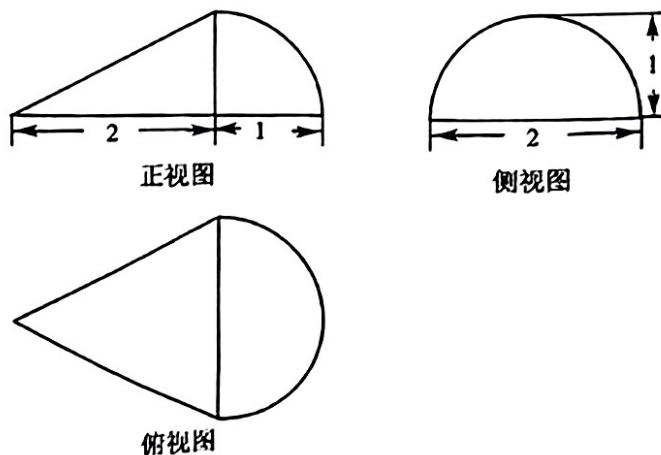
4. 写算, 是一种格子乘法, 也是笔算乘法的一种, 用以区别筹算与珠算, 它由明代数学家吴敬在其撰写的《九章算法比类大全》一书中提出, 是从天元式的乘法演变而来. 例如计算 89×61 , 将被乘数 89 计入上行, 乘数 61 计入右行, 然后以乘数 61 的每位数字乘被乘数 89 的每位数字, 将结果计入相应的格子中, 最后从右下方开始按斜行加起来, 满十向上斜行进一, 如图, 即得 5429. 若从表内的 8 个数字 (含相同的数字, 表周边数据不算在内) 中任取 2 个数字, 则它们之和大于 13 的概率为

- A. $\frac{3}{28}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{5}{28}$ D. $\frac{3}{14}$



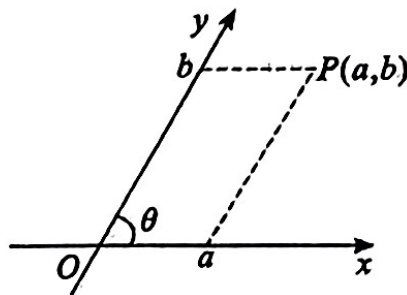
5. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. π C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$



6. 互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系, 但如果平面坐标系中两条坐标轴不垂直, 则这样的坐标系称为“斜坐标系”. 如图, 在斜坐标系中, 过点 P 作两坐标轴的平行线, 其在 x 轴和 y 轴上的截距 a, b 分别作为点 P 的 x 坐标和 y 坐标, 记 $P(a, b)$. 若斜坐标系中, x 轴正方向和 y 轴正方向的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则该坐标系中 $M(2, 2)$ 和 $N(4, 1)$ 两点间的距离为

- A. 2
- B. 1
- C. $\sqrt{5}$
- D. $\sqrt{3}$



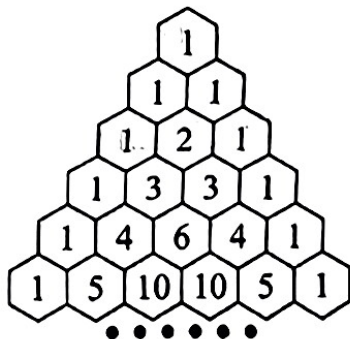
7. 首钢滑雪大跳台是冬奥史上第一座与工业旧址结合再利用的竞赛场馆, 它的设计创造性地融入了敦煌壁画中飞天的元素, 建筑外形优美流畅, 飘逸灵动, 被形象地称为雪飞天. 中国选手谷爱凌和苏翊鸣分别在此摘得女子自由式滑雪大跳台和男子单板滑雪大跳台比赛的金牌. 雪飞天的助滑道可以看成是一个线段 PQ 和一段圆弧 \widehat{QM} 组成, 如图所示. 在适当的坐标系下圆弧 \widehat{QM} 所在圆的方程为 $(x+10)^2 + (y-3)^2 = 128$, 若某运动员在起跳点 M 以倾斜角为 45° 且与圆 C 相切的直线方向起跳, 起跳后的飞行轨迹是一个对称轴在 y 轴上的抛物线的一部分, 如下图所示, 则该抛物线的轨迹方程为



- A. $x^2 = -4(y+4)$
- B. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
- C. $x^2 = -32(y-1)$
- D. $y^2 = -\frac{1}{4}(x+4)$

8. 如图为“杨辉三角”示意图, 已知每一行的数字之和构成的数列为等比数列且记该数列前 n 项和为 S_n ; 设 $b_n = \sqrt{5 \log_2(S_n + 1) + 1}$, 将数列 $\{b_n\}$ 中的整数项依次取出组成新的数列记为 $\{c_n\}$, 则 c_{20} 的值为

- A. 545
- B. 550
- C. 560
- D. 565



9. 中国古代十进位制的算筹记数法在世界数学史上是一个伟大的创造. 据史料推测, 算筹最晚出现在春秋晚期战国初年, 算筹记数的方法是: 个位、百位、万位...的数按纵式的数码摆出; 十位、千位、十万位...的数按横式的数码摆出. 如 7738 可用算筹表示为 $\underline{\perp} \perp \equiv \equiv$.

纵式: $\begin{array}{cccccccc} | & || & ||| & |||| & |||| & \perp & \perp & \equiv & \equiv \end{array}$

横式: $\begin{array}{cccccccc} \text{—} & = & \equiv & \equiv & \equiv & \perp & \perp & \equiv & \equiv \end{array}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1-9 这 9 个数字的纵式与横式的表示数码如上图所示, 则 $\int_0^{\pi} (\cos x) dx + 3^{\log_2 32}$ 的运算结果可用算筹表示为

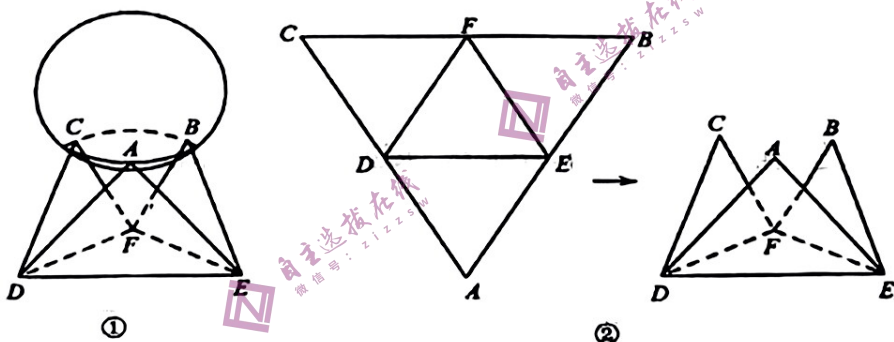
A. $\begin{array}{ccc} || & \equiv & \perp \end{array}$

B. $\begin{array}{ccc} \equiv & || & \perp \end{array}$

C. $\begin{array}{ccc} \equiv & = & \perp \end{array}$

D. $\begin{array}{ccc} \perp & = & \equiv \end{array}$

10. 某地举办数学建模大赛, 本次大赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成, 如图①, 已知球的表面积为 $\frac{32\pi}{3}$, 托盘由边长为 8 的等边三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠形成, 即面 ADE , 面 CDF , 面 BEF 都与面 DFE 垂直, 如图②, 则球心到托盘底面 DFE 的距离为



A. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

11. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 直线 l 经过 F_1 且与 C 左支交于 P, Q 两点, P 在以 F_1F_2 为直径的圆上, $|PQ|:|PF_2| = 3:4$, 则 C 的离心率是

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{17}}{3}$

12. 已知定义域为 \mathbb{R} 的函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的曲线, 对任意实数 m, n 均满足

$$e^n f(m) + e^{2m} f(n-m) = e^m f(n); \text{ 且当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) > 0. \text{ 若 } g(x) = \begin{cases} e^{x-1} f(1-x) & x < 1 \\ e^{1-x} f(x-1) & x \geq 1 \end{cases},$$

则下列判断正确的是

A. $g(1) > g(0)$

B. $g(3) < g(-1)$

C. $g(2) < g(-1)$

D. $g(3) > g(-2)$

第II卷（非选择题）

本卷包括必考题和选考题两部分，第13题~第21题为必考题，每个试题考生必须作答，第22题~第23题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则 a_n 为_____.

14. 已知 i 为虚数单位, 且 $|z - 2i| = 1$, 则 $|z|$ 的最大值是_____.

15. 已知直线 $x = a$ ($0 < a < \frac{\pi}{2}$) 与函数 $f(x) = \sin x$ 和函数 $g(x) = \cos x$ 的图象分别交于 P, Q 两点, 若 $|PQ| = \frac{1}{4}$, 则线段 PQ 中点的纵坐标为_____.

16. 若曲线 $y = \ln x$ 在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线与曲线 $y = e^x$ 相切于点 $Q(x_2, y_2)$, 则

$$\frac{2}{x_1 - 1} + x_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必做题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选做题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

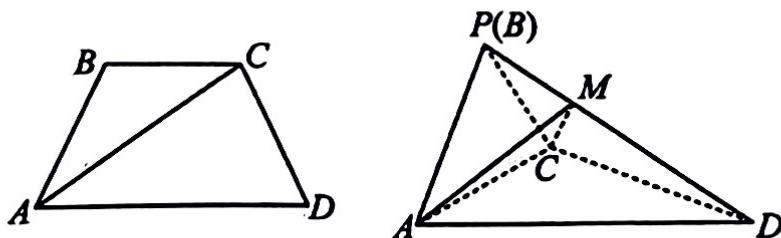
17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c . 已知 $\tan B + \tan C = \frac{2 \sin A}{\cos C}$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 且 $a = c + 2$, 求边 c 的取值范围.

18 如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD = \frac{1}{2} AD = 2$, 现以 AC 为折痕把

$\triangle ABC$ 折起, 使点 B 到达点 P 的位置, 且 $PA \perp CD$.



(1) 证明: 面 $PAC \perp$ 面 ACD ;

(2) 若 M 为 PD 上的一点, 点 P 到面 ACM 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求二面角 $M-AC-D$ 的余弦值.

19.部分高校开展基础学科招生改革试点工作（强基计划）的校考由试点高校自主命题，校考过程中达到笔试优秀才能进入面试环节。已知 A、B 两所大学的笔试环节都设有三门考试科目且每门科目是否达到优秀相互独立。若某考生报考 A 大学，每门科目达到优秀的概率均为 $\frac{2}{5}$ ，若该考生报考 B 大学，每门科目达到优秀的概率依次为 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{5}$ ， n ，其中 $0 < n < 1$ 。

(1) 若 $n = \frac{1}{3}$ ，分别求出该考生报考 A、B 两所大学在笔试环节恰好有一门科目达到优秀的概率；

(2) 强基计划规定每名考生只能报考一所试点高校，若以笔试过程中达到优秀科目个数的期望为依据作出决策，该考生更有希望进入 A 大学的面试环节，求 n 的范围。

20. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A 、 B ，且焦距为 2。点 P 在椭圆上

且异于 A 、 B 两点。若直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$ ，

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 过点 $F(-1, 0)$ 作不与 x 轴重合的直线与椭圆 C 相交于 M 、 N 两点，直线 m 的方程为： $x = -2a$ ，过点 M 作 ME 垂直于直线 m ，交 m 于点 E 。求 $\triangle OEN$ 面积的最大值，

21. 已知函数 $f(x) = e^x - \lambda \sin x$ 。

(1) 求最大的整数 λ ，使得对任意 $x \in (0, \pi)$ ， $f(x) > 0$ ；

(2) 若函数 $g(x) = e^x + 3 \sin x - 1 - ax$ ，当 $1 \leq a < 4$ 时，讨论函数 $g(x)$ 零点的个数。

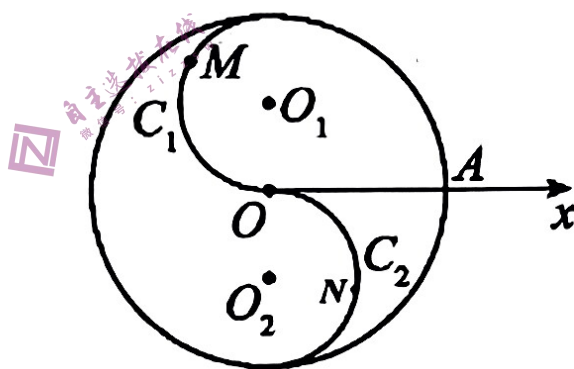
参考数据： $e^{\frac{\pi}{4}} \approx 2.193$

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. 如图，在极坐标系 Ox 中，圆 O 的半径为 2，半径均为 1 的两个半圆弧 C_1, C_2 所在圆的圆心分别为 $O_1(1, \frac{\pi}{2}), O_2(1, \frac{3\pi}{2})$ ， M 是半圆弧 C_1 上的一个动点， N 是半圆弧 C_2 上的一个动点。

(1) 若 $\angle O_2ON = \frac{\pi}{3}$ ，求点 N 的极坐标；

(2) 若点 K 是射线 $\theta = \frac{\pi}{3}, (\rho \geq 0)$ 与圆 O 的交点，求 $\triangle MOK$ 面积的取值范围。



23. 设 a, b, c 均为正数，且 $4a^2 + b^2 + 16c^2 = 1$.

证明：(1) $0 < ab < \frac{1}{4}$ ；

(2) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{4abc^2} > 49$.