2024 届安徽省高三摸底大联考·数学
参考答案、解析及评分细则

1. C　根据复数的乘法与除法运算，化简即可求得复数 z. 结合共轭复数的定义即可得$\bar{z}$. 将式子$(1+\mathrm{i})^2z=2-4\mathrm{i}$化简可得，$z=\frac{2-4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=\frac{2-4\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=-2-\mathrm{i}$，根据共轭复数定义可知$\bar{z}=-2+\mathrm{i}$，$z$ 的共轭复数虚部为 1，故选 C.

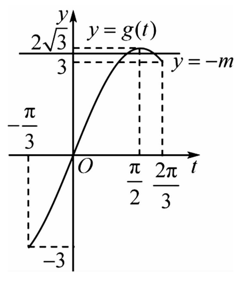
2. C　集合 A 中元素满足 $x=2n+3,n\in\mathbf{N}$，即该数为大于 1 的奇数，而集合 B 中大于 1 的奇数只有 3 和 9. 所以真子集有 3 个，故选 C.

3. C　根据题意，有一个项目中分配 2 名志愿者，其余各项目中分配 1 名志愿者，可以先从 5 名志愿者中任选 2 人，组成一个小组，有 C_5^2 种选法；然后连同其余三人，看成四个元素，四个项目看成四个不同的位置，四个不同的元素在四个不同的位置的排列方法数有 4！种，根据乘法原理，完成这件事，共有 $C_5^2\times4!=240$ 种不同的分配方案. 故选 C.

4. A　令 $g(x)=f(x)-3=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x}$，则 $g(-x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{x}=-g(x)$，$\therefore g(x)$是定义域上的奇函数，因此 $g(x)_{\min}+g(x)_{\max}=0\therefore M+m=6$. 故选 A.

5. B　根据双曲线的对称性，不妨设一条渐近线 l 的方程为 $y=\frac{b}{a}x$，因此直线 MF_2 的倾斜角 α 的正切值为$\frac{b}{a}$，即 $\tan\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=bk,\cos\alpha=ak(k>0)$，所以有$(bk)^2+(ak)^2=1\Rightarrow ck=1\Rightarrow k=\frac{1}{c}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a}{c}$，设$|MF_2|=m,|MF_1|=3m$，由双曲线定义可知：$|MF_1|-|MF_2|=2a=2m\Rightarrow a=m\Rightarrow|MF_2|=a,|MF_1|=3a$，由余弦定理可知：$(3a)^2=a^2+(2c)^2-2a\cdot2c\cdot\frac{a}{c}\Rightarrow c^2=3a^2\Rightarrow e=\sqrt{3}$. 故选 B.

6. A　$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-m=3\cos x-\sqrt{3}\sin x-m=-(\sqrt{3}\sin x-3\cos x)-m=-2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-m$，由 $f(x)=0$ 可得$-m=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$\because x\in[0,\pi]$，$\therefore-\frac{\pi}{3}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，令 $t=x-\frac{\pi}{3}$，则 $t\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，令 $g(t)=2\sqrt{3}\sin t$，其中 $t\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，则直线 $y=-m$ 与函数 $g(t)$ 在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上的图象有两个交点，且 $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-3$，$g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}=3$，如下图所示：由图可知，当 $3\leqslant-m<2\sqrt{3}$时，即当$-2\sqrt{3}<m\leqslant-3$ 时，直线 $y=-m$ 与函数$g(t)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上的图象有两个交点，此时函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上有两个零点，故实数 m 的取值范围是$(-2\sqrt{3},-3]$. 故选 A.



7. A　依题意 $a_1=1$，$x_n>2$，$f(x)=x^2-x-2$，$f'(x)=2x-1$，依题意 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，即 $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1}$，则 $x_{n+1}+1=x_n-\frac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1}+1=\frac{(x_n+1)^2}{2x_n-1}$，$x_{n+1}-2=x_n-\frac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1}-2=\frac{(x_n-2)^2}{2x_n-1}$(由于 $x_n>2$，所以 $x_{n+1}\neq2$)，则$\frac{x_{n+1}+1}{x_{n+1}-2}=\frac{(x_n+1)^2}{(x_n-2)^2}$，两边取对数得 $\ln\frac{x_{n+1}+1}{x_{n+1}-2}=\ln\left(\frac{x_n+1}{x_n-2}\right)^2=2\ln\frac{x_n+1}{x_n-2}$，即 $a_{n+1}=2a_n$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 $a_1=1$，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n=2^{n-1}$. 所以 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，所以 $S_{2022}=2^{2022}-1$. 故选 A.

8. C　因为 $a>0$，由 $ax-a>0$ 可得 $x>1$，即函数 $f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$，$f(x)=\mathrm{e}^x-a\ln a-a\ln(x-1)+a<0$可得$\frac{\mathrm{e}^x}{a}-\ln a<\ln(x-1)-1$，即 $\mathrm{e}^{x-\ln a}+x-\ln a<x-1+\ln(x-1)$，构造函数 $g(x)=x+\ln x$，其中 $x>$

0,则 $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$,故函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以,$g(e^{x-\ln a})<g(x-1)$,可得 $e^{x-\ln a}<x-1$,则 $x-\ln a<\ln(x-1)$,即 $\ln a>x-\ln(x-1)$,其中 $x>1$,令 $h(x)=x-\ln(x-1)$,其中 $x>1$,则 $h'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$,当 $1<x<2$ 时,$h'(x)<0$,此时函数 $h(x)$单调递减,当 $x>2$ 时,$h'(x)>0$,此时函数 $h(x)$单调递增,所以,$\ln a>h(x)_{\min}=h(2)=2$,解得 $a>e^2$. 故选 C.

9. AC 因为正态分布密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-100)^2}{200}}$,所以 $\mu=100$,$\sigma=10$,即均值为 100,标准差为 10,方差为 100,故 A 正确,B 错误;根据正态曲线的特征可知函数 $\varphi(x)$关于 $x=100$ 轴对称,所以该地杂交水稻株高在 120 cm 以上的数量和株高在 80 cm 以下的数量一样多,故 C 正确,随机测量该地的一株杂交水稻,其株高在(80,90)和在(110,120)的概率一样大. 故 D 错误. 故选 AC.

10. BD 对于 A,由题知,$|\overrightarrow{BC}|=3$,$|\overrightarrow{AC}|=4$,$\angle C=30°$,所以$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$的夹角为 150°,所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos 150°=3\cdot 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-6\sqrt{3}$,故 A 错误;对于 B,因为 $\boldsymbol{a}=(-4,5)$,$\boldsymbol{b}=(-2,4)$,所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-6,6)$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$,故 B 正确;对于 C,因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积小于 0 且不平行,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=d-1<0\Rightarrow d<1$ 且 $d\neq-1$,所以 $d\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)$. 故 C 错误;对于 D,$\because\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,$\therefore\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5\overrightarrow{AB}$$\therefore\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BD}$共线,又$\because$它们有公共点 B,$\therefore A$,B,D 三点共线. 故 D 正确. 故选 BD.

11. ABD 对于 A,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,若 $x_1=x_2$,则直线 AB:$x=2$,由抛物线的对称性可知,线段 AB 的中点为(2,0),显然不符合题意,故 $x_1\neq x_2$,因为 A,B 是抛物线 C:$y^2=4x$ 上的两点,所以$\begin{cases}y_1^2=4x_1\\y_2^2=4x_2\end{cases}$,两式相减得,$y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$,整理得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}$,因为线段 AB 的中点为(2,2),所以$\frac{y_1+y_2}{2}=2$,即 $y_1+y_2=4$,又 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,所以 $k_{AB}=\frac{4}{4}=1$,所以直线 AB 的方程为 $y-2=x-2$,即 $y=x$. 故 A 正确;对于 B,$\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2-4x=0\end{cases}$消去 y 整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,$\because$ 直线与抛物线交于 A,B 两点,$\begin{cases}k\neq0\\\Delta=(2k^2+4)^2-4k^2>0\end{cases}$解得 $k\neq0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$. $\because|AB|=x_1+x_2+2=\frac{16}{3}$,$\therefore x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=\frac{10}{3}$,$\therefore k^2=3$,$k=\pm\sqrt{3}$. 检验知 $k=\pm\sqrt{3}$ 满足条件. 故 B 正确;对于 C,设 $A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$,则 $\tan\angle AMO=k_{AM}=\frac{y_1-0}{\frac{y_1^2}{4}+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,解得 $y_1=\sqrt{2}$或 $y_1=2\sqrt{2}$,所以 $A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$或 $A(2,2\sqrt{2})$,又$\because F(1,0)$,所以 $k_{AF}=\frac{\sqrt{2}-0}{\frac{1}{2}-1}=-2\sqrt{2}$或 $k_{AF}=\frac{2\sqrt{2}-0}{2-1}=2\sqrt{2}$,故 C 错误;对于 D,设 N 到 l_1:$4x-3y+8=0$ 的距离为 d_1,N 到直线 $x=-1$ 的距离为 d_2,则 $d_1+d_2=d_1+NF$,根据平面几何知识,可得当三点共线时,$d_1+d_2=d_1+NF$ 有最小值,因为抛物线焦点 $F(1,0)$到直线 l_1:$4x-3y+8=0$ 的距离为$\frac{12}{5}$,所以 $d_1+d_2=d_1+NF$ 的最小值是$\frac{12}{5}$,所以抛物线上一动点 N 到直线 l_1:$4x-3y+8=0$ 和 l_2:$x=-3$ 的距离之和的最小值为$\frac{12}{5}+2=\frac{22}{5}$. 故 D 正确. 故选 ABD.

12. CD 对于 A,若$[1,a]$为 $f(x)=x^2-2x+2$ 的跟随区间,因为 $f(x)=x^2-2x+2$ 在区间$[1,a]$为增函数,故其值域为$[1,a^2-2a+2]$,根据题意有 $a^2-2a+2=a$,解得 $a=1$ 或 $a=2$,因为 $a>1$ 故 $a=2$. 故 A 错误. 对于 B,由题,因为函数 $f(x)=\frac{9}{2}-\frac{2}{x}$在区间$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$上均为增函数,若 $f(x)=\frac{9}{2}-\frac{2}{x}$存在跟随

区间$[a,b]$则有$\begin{cases}a=\dfrac{9}{2}-\dfrac{2}{a}\\ b=\dfrac{9}{2}-\dfrac{2}{b}\end{cases}$，即$a,b$为$x=\dfrac{9}{2}-\dfrac{2}{x}$的两根.即$2x^2-9x+4=0$的根.故$a=\dfrac{1}{2}$，$b=4$.故B错误.对于C，若函数$f(x)=m-\sqrt{x+1}$存在跟随区间$[a,b]$，因为$f(x)=m-\sqrt{x+1}$为减函数，故由跟随区间的定义可知$\begin{cases}b=m-\sqrt{a+1}\\ a=m-\sqrt{b+1}\end{cases}\Rightarrow a-b=\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}$，即$(a-b)(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1})=(a+1)-(b+1)=a-b$，因为$a<b$，所以$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=1$.易得$0\leqslant\sqrt{a+1}<\sqrt{b+1}\leqslant 1$.所以$a=m-\sqrt{b+1}=m-(1-\sqrt{a+1})$，令$t=\sqrt{a+1}(t\in[0,1])$代入化简可得$t^2-t-m=0$，同理$t=\sqrt{b+1}$也满足$t^2-t-m=0$，即$t^2-t-m=0$在区间$[0,1]$上有两不相等的实数根.故$\begin{cases}1+4m>0\\ -m\geqslant 0\end{cases}$，解得$m\in\left(-\dfrac{1}{4},0\right]$，故C正确.对于D，若$f(x)=-x^2+2x$存在“3倍跟随区间”，则可设定义域为$[a,b]$，值域为$[3a,3b]$.当$a<b\leqslant 1$时，易得$f(x)=-x^2+2x$在区间上单调递增，此时易得$a,b$为方程$3x=-x^2+2x$的两根，求解得$x=-1$或$x=0$.故定义域$[-1,0]$，则值域为$[-3,0]$. D正确.故选CD.

13. $\dfrac{625\pi}{4}$　由题意，可设圆锥的底面半径为r，则$10\pi r=60\pi$，故$r=6$，则圆锥的高$h=8$，设该圆锥外接球的半径为R，则$R^2=6^2+(8-R)^2$，解得$R=\dfrac{25}{4}$，故该圆锥外接球的表面积为$\dfrac{625\pi}{4}$.

14. 160　将这组数据按照从小到大的顺序排列得84，88，90，100，140，160，170，188，202因为$9*60\%=5.4$，所以这组数据的第60百分位数为160.

15. 2或3或4(注意：只需从2，3，4中写一个作答即可)　因为圆O的圆心为$(-1,2)$，所以圆心到直线l的距离$d=\dfrac{|-3-8+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$，因为圆$O$的方程可化简为$(x+1)^2+(y-2)^2=5-m$，即半径为$\sqrt{5-m}$，所以$\begin{cases}\sqrt{5-m}<2\\ 5-m>0\end{cases}$，所以$1<m<5$，故整数$m$的取值可能是2，3，4.

16. ②④⑤　对①：$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left|-\dfrac{\pi}{2}\right|+\left|\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\sin\dfrac{\pi}{2}+\left|\cos\dfrac{\pi}{2}\right|=1$，$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\left|\dfrac{3\pi}{2}\right|+\left|\cos\dfrac{3\pi}{2}\right|=\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$，即$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi\right)$，故$f(x)$不是以$2\pi$为最小正周期的周期函数，故①错误；对②：$f(-x)=\sin|-x|+|\cos(-x)|=\sin|x|+|\cos x|=f(x)$，故$f(x)$是偶函数，②正确；对③：当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$时，可得$f(x)=\sin x+|\cos x|=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\therefore\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故$f(x)\in[-1,\sqrt{2}]$；当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，则$x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$，$\therefore\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故$f(x)\in(-1,\sqrt{2}]$；综上所述：当$x\in[0,2\pi]$，$f(x)$的值域为$[-1,\sqrt{2}]$.当$x\geqslant 0$时，则$f(x)=\sin x+|\cos x|$，可得$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+|\cos(x+2\pi)|=\sin x+|\cos x|=f(x)$，故$x\geqslant 0$时，$f(x)$的值域为$[-1,\sqrt{2}]$，又$\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(x)$的值域为$[-1,\sqrt{2}]$，即$f(x)$的最小值为$-1$，③错误；对④：由③可得：当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$时，令$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，即$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，$\because x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$，则$x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}\right]$，$\therefore$当$x+\dfrac{\pi}{4}=2\pi$，即$x=\dfrac{7\pi}{4}$时，$f(x)=0$；当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，则$x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$，$\therefore$当$x-\dfrac{\pi}{4}=\pi$，即$x=\dfrac{5\pi}{4}$时，$f(x)=0$；综上所述：$f(x)$在$[0,2\pi]$上有2个零点$\dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{7\pi}{4}$. $\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(x)$在$[-2\pi,2\pi]$上有4个零点$-\dfrac{7\pi}{4}$，$-\dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{7\pi}{4}$，④正确；对⑤：当$x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$时，则$x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，可是$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$在区间$\left[\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$上单调递减，⑤正确.

17. 解：(1)因 $\boldsymbol{m}=(2a,\sqrt{6})\boldsymbol{n}=(b,\sqrt{2}\sin B)$，且 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，

于是有 $2a\times\sqrt{2}\sin B=\sqrt{6}b$，即 $2a\sin B=\sqrt{3}b$， …… 2 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得：$2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$，而 $\sin B>0$，

于是得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 A 为锐角，(未标锐角扣 1 分)

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …… 4 分

(2)在锐角 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore b=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B, c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$，

$\because C=\frac{2\pi}{3}-B$，且 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，故 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$， …… 6 分

$\therefore b+c=\frac{4\sqrt{3}}{3}[\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)]=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B)=4\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$， …… 8 分

又 $\because\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(B+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，故 $2\sqrt{3}<b+c\leqslant 4$，

$\therefore 2\sqrt{3}+2<a+b+c\leqslant 6$，即 $\triangle ABC$ 周长的取值范围是 $(2\sqrt{3}+2,6]$. …… 10 分

18. 解：(1)因为 $S_n=a_n+n^2-1$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=a_{n-1}+(n-1)^2-1$，

两式相减得：$a_n=a_n-a_{n-1}+2n-1$，即 $a_{n-1}=2n-1$， …… 3 分

所以 $a_n=2n+1$，

且 $a_1=3$ 符合，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$. $(n\in\mathbf{N}^*)$ …… 6 分

(2)由(1)得：$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$， …… 8 分

$\therefore\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}$， …… 11 分

$\because\frac{1}{4n+6}>0$，$\therefore\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{6}$. …… 12 分

19. 解：(1)设 A_1B 中点为 M，$\because ABB_1A_1$ 为正方形，A,M,B_1 三点共线且 $AA_1=AB$，则 $AM\perp A_1B$，

$\because$ 平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，$AM\subset$ 平面 ABB_1A_1，

$\therefore AM\perp$ 平面 A_1BC， …… 3 分

又 $BC\subset$ 平面 A_1BC，$\therefore AM\perp BC$，

又直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore BB_1\perp BC$，

$AM\cap BB_1=B_1$，$AM\subset$ 平面 ABB_1A_1，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore BC\perp$ 平面 ABB_1A，

又 $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore AB\perp BC$. …… 6 分

(2)由(1)直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\angle ACM=\frac{\pi}{6}$，

不妨设 $AB=2, AM=\sqrt{2}, AC=2\sqrt{2}, BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2$，

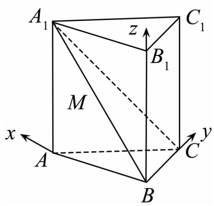
以 B 为原点，$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}$ 分别为 x,y,z 轴正向建立坐标系，

$A(2,0,0), C(0,2,0), E(1,1,1)$， …… 8 分

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=0\\ x+y+z=0\end{cases}$，令 $y=1$，$\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$，

同理可得平面 CBE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$，…………………………………… 10 分



设平面 ABE 与平面 BCE 所成锐二面角的大小为 θ，

$\therefore\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)$\because(0.002+0.004+0.015+0.02+a+0.034)\times10=1$，解得 $a=0.025$，

设至少 2 人非常满意的概率为事件 A，

由题意知 5 人中非常满意的人数 $\xi\sim B\left(5,\dfrac{1}{4}\right)$，

$P(A)=1-\mathrm{C}_5^0\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^5-\mathrm{C}_5^1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{47}{128}$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)由频率分布直方图得：

满意度平均分为 $45\times0.02+55\times0.04+65\times0.15+75\times0.2+85\times0.34+95\times0.25=80.5$，

满意指数 $=\dfrac{\text{满意度平均分}}{100}=0.805>0.8$，因此，能通过验收. ………………………………………… 7 分

(3)分层抽取 9 人中老人有 3 人，

由题意知 X 服从超几何分布，X 的可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\dfrac{\mathrm{C}_6^3}{\mathrm{C}_9^3}=\dfrac{20}{84}=\dfrac{5}{21}$，$P(X=1)=\dfrac{\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_9^3}=\dfrac{45}{84}=\dfrac{15}{28}$，$P(X=2)=\dfrac{\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_9^3}=\dfrac{18}{84}=\dfrac{3}{14}$，$P(X=3)=\dfrac{\mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_9^3}=\dfrac{1}{84}$，

则分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{14}$	$\dfrac{1}{84}$

……………………………………………………… 11 分

所以，$E(X)=0\times\dfrac{5}{21}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{3}{14}+3\times\dfrac{1}{84}=1$. ……………………………………………………… 12 分

21. (1)解：因为椭圆 C 的长轴长为 $2a=4$，则 $a=2$，

将点 A 的坐标代入椭圆 C 的方程可得 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1$，可得 $b=1$，

所以，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)解：若 l 与 x 轴重合，则 $\triangle DEG$ 不存在，

设直线 l 的方程为 $x=my-1$，设点 $D(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$，

若 $m=0$，则点 F 与点 D 重合，不合乎题意，所以，$m\neq0$，

联立 $\begin{cases}x=my-1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 可得 $(m^2+4)y^2-2my-3=0$，

$\Delta=4m^2+12(m^2+4)=16(m^2+3)>0$，

由韦达定理可得 $y_1+y_2=\dfrac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+4}$，…………………………………………………… 6 分

易知点 $F(x_2,-y_2)$，$k_{DF}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1+y_2}{m(y_1-y_2)}$，

直线 DF 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{m(y_1-y_2)}(x-x_1)$，

将 $y=0$ 代入直线 DF 的方程可得 $x=\dfrac{2my_1y_2}{y_1+y_2}-1=-4$，即点 $G(-4,0)$，

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{4\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}$, …………………………………………………………………… 8 分

所以，$S_{\triangle DEG}=\dfrac{1}{2}|BG|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}=\dfrac{6}{\sqrt{m^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+3}}}$, ………………………… 10 分

令 $t=\sqrt{m^2+3}>\sqrt{3}$，则函数 $y=\sqrt{m^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+3}}$ 在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上为增函数，

所以，$y=\sqrt{m^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+3}}>\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以，$S=\dfrac{6}{\sqrt{m^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+3}}}\in\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

故 $\triangle DEG$ 的面积 S 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=(e^x-ax)'(x-2)+(e^x-ax)(x-2)'=xe^x-e^x-2ax+2a$,

所以 $f'(2)=2e^2-e^2-4a+2a=e^2$，解得 $a=0$; ……………………………………………………………… 3 分

(2) $f'(x)=xe^x-e^x-2ax+2a$，令 $f'(x)=0$ 得 $(x-1)e^x=2a(x-1)$,

解得 $x=1$，或 $x=\ln(2a)(a>0)$, …………………………………………………………………………… 5 分

当 $0<2a<e$ 即 $0<a<\dfrac{e}{2}$ 时，$x_2=1$，对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)<0$ 恒成立，

得 $f(x)=(e^x-ax)(x-2)<0$ 可得 $e^x-ax>0$，$x\in[0,1]$,

$x=0$ 时 $e^0-0=1>0$ 成立，$x\neq0$ 时，有 $a<\dfrac{e^x}{x}$ 在 $(0,1]$ 上恒成立，……………………………………… 7 分

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$x\in(0,1]$，$g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}\leqslant0$，所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,1]$ 上单调递减，

有 $g(x)\geqslant g(1)=e$，所以 $0<a<\dfrac{e}{2}$;

当 $2a>e$ 即 $a>\dfrac{e}{2}$ 时，$x_2=\ln(2a)$，对任意 $x\in[0,\ln(2a)]$，$f(x)<0$ 恒成立，

因为 $f(0)=(e^0-0)\times(0-2)<0$，$f'(x)=(x-1)(e^x-2a)$,

x	$[0,1)$	1	$(1,\ln(2a))$	$\ln(2a)$	$(\ln(2a),+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

可得 $\begin{cases}f(1)=(e^1-a)(1-2)<0\Rightarrow a<e\\ f(\ln(2a))=[e^{\ln(2a)}-a\ln(2a)][\ln(2a)-2]<0\end{cases}$, ………………………………………… 10 分

令 $t=\ln(2a)$，$f(\ln(2a))=f(t)=\left(e^t-\dfrac{1}{2}te^t\right)(t-2)<0\Rightarrow e^t(2-t)(t-2)<0$,

$e^t(t-2)^2>0$，解得 $t\neq2\Rightarrow a\neq\dfrac{e^2}{2}$,

所以 $\dfrac{e}{2}<a<e$;

当 $2a=e$ 即 $a=\dfrac{e}{2}$ 时，x_1，x_2 重合，不符合题意，

综上所述：$0<a<\dfrac{e}{2}$ 或 $\dfrac{e}{2}<a<e$. ………………………………………………………………… 12 分