安徽六校教育研究会2024届高三年级入学素质测试

数学试题参考答案

1. 【答案】B

【解析】

方法一：因为 $M=\{x\in Z\,|\,x^2\le 4\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}\ge 0\right.\right\}=\{x\,|\,x<-1,\text{或}x\ge 2\}$，

所以 $M\cap N=\{-2,2\}$.

故选：B.

方法二：因为 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，将 $-2,-1,0,1,2$ 代入不等式 $\frac{x-2}{x+1}\ge 0$，则有 -2，2 使不等式成立，

所以 $M\cap N=\{-2,2\}$.

故选：B.

2.【答案】A

【解析】由复数的几何意义可知，$z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，$|z|=2$，$\frac{1-\mathrm{i}}{|z|+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$.

故选：A.

3.【答案】D

【解析】因为 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{3}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=3\sin\alpha\sin\beta$，

又 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$.

故选 D.

4.【答案】C

【解析】由 $|3\vec{m}-2\vec{n}|=\sqrt{7}$，得 $|3\vec{m}-2\vec{n}|^2=(3\vec{m}-2\vec{n})^2=9|\vec{m}|^2+4|\vec{n}|^2-12\vec{m}\cdot\vec{n}=7$，

又 $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$，$\therefore 9+4-12\vec{m}\cdot\vec{n}=7$，整理得：$\vec{m}\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}$，

因为 $\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\vec{m},\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，

向量 $\vec{m}$ 在向量 $\vec{n}$ 方向上的投影向量为 $\frac{1}{2}\vec{n}$.

故选 C.

5.【答案】D

【解析】设$M(x,y)$，因为$|MB|=2|MA|$，所以$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$，化简得$(x+2)^2+y^2=4$，

由题可知$P(2,0)$，$Q(0,2)$，则$|PQ|=2\sqrt{2}$，圆心到直线的距离$d=\frac{|-2+0-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ $(S_{\triangle MPQ})_{\min}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$.

故选D.

6. 【答案】C

【解析】对于任意的$n\in N^*$，$a_{n+2}<a_n$，即$a_n(q^2-1)<0$.

$\therefore\begin{cases}a_n>0\\q^2-1<0\end{cases}$或$\begin{cases}a_n<0\\q^2-1>0\end{cases}$，任意的$n\in N^*$都成立，

$\therefore\begin{cases}a_n>0\\0<q<1\end{cases}$，或$\begin{cases}a_n<0\\q>1\end{cases}$.

$\therefore$“$\{a_n\}$为递减数列”，反之也成立.

$\therefore$“对于任意的$n\in N^*$，$a_{n+2}<a_n$”是“$\{a_n\}$为递减数列”的充要条件.

故选C.

7.【答案】C

【解析】由椭圆和双曲线的几何性质得$e_1=\frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}},e_2=\frac{2}{\sqrt{4-m}}$，

所以$\frac{e_1}{e_2}=\frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sqrt{4-m}}{2}$，$(e_1\cdot e_2)^2=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{4-m}{4}=\frac{5m-m^2-4}{4m}=\frac{5}{4}-(\frac{m}{4}+\frac{1}{m})\le\frac{1}{4}$，

当且仅当$m=2$时等号成立，所以$e_1\cdot e_2\leqslant\frac{1}{2}$.

故选C.

8.【答案】A

【解析】$f(x)$的定义域满足$\sqrt{x^2+1}+x>0$，由$\sqrt{x^2+1}>|x|\ge -x$，

所以$\sqrt{x^2+1}+x>0$在R上恒成立. 所以$f(x)$的定义域为R，

而$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\frac{(e^x-1)-(e^x+1)}{e^x+1}=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\frac{e^x-1}{e^x+1}-1$

令$h(x)=f(x)+1=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\frac{e^x-1}{e^x+1}$

则 $h(x)+h(-x)=\left[\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right]+\left[\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right]$

$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=\ln 1+0=0$

所以 $y=h(x)$ 是奇函数.

设 $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，由上可知 $g(x)$ 为奇函数.

当 $x\geq 0$ 时，$y=\sqrt{x^2+1}$，$y=x$ 均为增函数，则 $y=\sqrt{x^2+1}+x$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数.

所以 $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数.

又 $g(x)$ 为奇函数，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为增函数，且 $g(0)=0$

所以 $g(x)$ 在 R 上为增函数.

又 $y=e^x+1$ 在 R 上为增函数，$y=\dfrac{2}{e^x+1}$ 在 R 上为减函数，

所以 $h(x)$ 在 R 上为增函数，

由不等式 $f(x)+f(2x-1)>-2$，即 $f(x)+1>-\left[f(2x-1)+1\right]$，

也即 $h(x)>-h(2x-1)=h(1-2x)$，所以 $x>1-2x$，则 $x>\dfrac{1}{3}$

故选：A.

9. 【答案】CD

【解析】由表可知该班男生每周课外阅读的平均时长的平均值为

$\dfrac{6.1+6.5+6.9+7.5+7.7+8.0+8.1+8.2+8.6+9.4}{10}=7.7$，$A$ 错误;

该班女生每周课外阅读的平均时长的 80% 分位数是 $\dfrac{9.0+9.2}{2}=9.1$，B 错误;

由表格所提供的数据可知男生极差大于女生极差（或者男生方差大于女生方差），C 正确;

由该班估计该校男生每周课外阅读的平均时长不低于 $8h$ 的概率为 $\dfrac{5}{10}=0.5$，D 正确.

故选 CD.

10. 【答案】AD

【解析】因为 $\dfrac{f'(t)}{f(t)}=R$（R 为常数），

所以 $\ln f(t)=Rt+C$，（c 为常数），即 $f(t)=e^{Rt+C}$，

由题意可得方程组$\begin{cases}81=e^{4R+C}\\27=e^{8R+C}\end{cases}$，解得$\begin{cases}R=-\dfrac{\ln 3}{4}\\C=5\ln 3\end{cases}$，故 B 错误，A 正确；

此时 $f(t)=e^{-\frac{\ln 3}{4}t+5\ln 3}$，

排气 20 分钟后，$f(20)=e^{-\frac{\ln 3}{4}\times 20+5\ln 3}=e^0=1>0.5$，

排气 24 分钟，$f(24)=e^{-\frac{\ln 3}{4}\times 24+5\ln 3}=e^{\ln\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$，故 C 错误，D 正确.

故选 AD.

11. 【答案】AB

【解析】由题意，列出部分定义域$[x+2]=\begin{cases}0,-2\leqslant x<-1\\1,-1\leqslant x<0\\2,0\leqslant x<1\\3,1\leqslant x<2\end{cases}$，

所以部分定义域的 $f(x)=[x+2]-x=\begin{cases}-x,-2\leqslant x<-1\\1-x,-1\leqslant x<0\\2-x,0\leqslant x<1\\3-x,1\leqslant x<2\end{cases}$，

可得到函数 $f(x)$ 是周期为 1 的函数，且值域为$(1,2]$，在$(0,1)$上单调递减，

故选项 A、B 正确，C 错误；

对于选项 D，结合图象知，若 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=k(x+1)+1$ 有 3 个交点，则

$k\in[-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{5})\cup(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$，

所以选项 D 错误，

故选：AB.

12. 【答案】ACD

【解析】

解：A 选项，由于 D 为 PB 的中点，

所以 $PB\perp CD, PB\perp AD$，

又 $CD\cap AD=D, AD, CD\subset$ 平面 ACD，

所以直线 $PB\perp$ 平面 ACD，又 $AE\subset$ 平面 ACD，

所以 $PB\perp AE$，故选项 A 正确；

B 选项，把 ΔACD 沿着 CD 展开与面 BDC 同一个平面内，由 $AD=CD=2\sqrt{3}$， $AC=4$，

$\cos\angle ADC=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-4^2}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，

$\cos\angle ADB=\cos(\dfrac{\pi}{2}+\angle ADC)=-\sin\angle ADC=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore AB^2=2^2+(2\sqrt{3})^2-2\times2\times2\sqrt{3}\times(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3})=16+\dfrac{16\sqrt{6}}{3}\neq34$，选项 B 错误；

C 选项，要使小球半径最大，则小球与四个面相切，是正四面体的内切球，

半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$（a 为棱长），选项 C 正确；

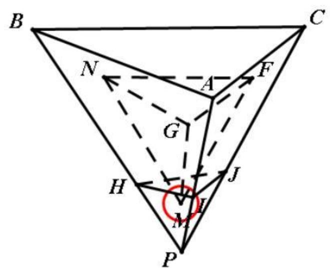
D 选项，4 个小球分 2 层(1 个，3 个)放进去，要使小球半径要最大，则 4 个小球与四个面相切，

设小球半径为 r，四个小球球心连线 $M-NGF$ 是棱长为 $2r$ 的正四面体，其高为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}r$，

由正四面体内切球的半径是高的 $\dfrac{1}{4}$ 得，如图正四面体 $P-HIJ$，则 $MP=3r$，

正四面体 $P-ABC$ 高为 $3r+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}r+r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times4$，

得 $r=\dfrac{2\sqrt{6}-2}{5}$. 选项 D 正确.



故选 ACD.

13. 【答案】65

【解析】要求高一年级和高二年级的同学都有，

则有 $C_3^1C_5^3+C_3^2C_5^2+C_3^3C_5^1=30+30+5=65$，或 $C_8^4-C_5^4=70-5=65$.

故答案为：65.

14. 【答案】$\dfrac{22\pi}{3}$

【解析】

如图，设上下截面小圆圆心分别为 E，F，上底面截面小圆上一点 A，连接 OA，

$\because$ 球 O 的表面积为 $4\pi R^2=16\pi$，$\therefore$ 球的半径 $R=2$，$\therefore OA=R=2$，

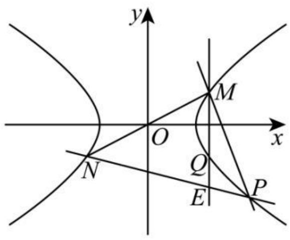
又 $OE=1$，$OE\perp EA$，$\therefore$ 截面小圆半径 $r=EA=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

根据“万能求积公式”可得所求几何体的体积为：

$V=\frac{1}{6}\times 2\times(\pi\cdot\sqrt{3}^2+4\times\pi\cdot 2^2+\pi\cdot\sqrt{3}^2)=\frac{22\pi}{3}$.

故答案为 $\frac{22\pi}{3}$.

15.【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$



【解析】设 $M(x_1,y_1),P(x_2,y_2)$，则 $N(-x_1,-y_1),Q(x_1,-y_1)$，

由 $\overrightarrow{ME}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$，则 $E\left(x_1,-\frac{5}{3}y_1\right)$，

从而有 $k_{MN}=\frac{y_1}{x_1},k_{PN}=k_{EN}=\frac{-y_1+\frac{5}{3}y_1}{-x_1-x_1}=-\frac{y_1}{3x_1}$，

又 $PM\perp MN$，所以 $k_{MP}=-\frac{x_1}{y_1}$，

又由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a^2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)=\frac{1}{b^2}(y_1+y_2)(y_1-y_2)$，

则 $\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=\frac{b^2}{a^2}$，即 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{b^2}{a^2}$，

所以 $k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{x_1}{y_1}\cdot\left(-\frac{y_1}{3x_1}\right)=\frac{1}{3}=\frac{b^2}{a^2}$，

所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16.【答案】①③④

【解析】因为 $f(\frac{\pi}{2}-x)=2\cos(\frac{\pi}{2}-x)-\sin 2(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin x-\sin 2x$，

$f(\frac{\pi}{2}+x)=2\cos(\frac{\pi}{2}+x)-\sin 2(\frac{\pi}{2}+x)=-2\sin x+\sin 2x$，

所以 $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x)=0$，故①正确;

因为 $f(\pi-x)=2\cos(\pi-x)-\sin 2(\pi-x)=-2\cos x+\sin 2x$，

$f(\pi+x)=2\cos(\pi+x)-\sin2(\pi+x)=-2\cos x-\sin2x$，

所以 $f(\pi-x)\neq f(\pi+x)$，故②错误;

因为 $f(2\pi+x)=2\cos(2\pi+x)-\sin2(2\pi+x)=2\cos x-\sin2x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，

故③正确;

函数 $f'(x)=-2\sin x-2\cos2x=-2\sin x-2+4\sin^2 x=2(2\sin x+1)(\sin x-1)$，

取 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，令 $f'(x)=0$，得 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 或 1，

所以 $x\in(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}),(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}),f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$x\in(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}),f'(x)\leq0,f(x)$ 单调递减，

且 $f(-\frac{\pi}{2})=f(\frac{3\pi}{2})=0$，所以 $f(x)_{\max}=f(-\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故④正确.

故答案为①③④.

17.【答案】(1) $B=\frac{\pi}{3}$ (2) $2\sqrt{7}$.

【解析】(1) 因为 $\frac{2a-c}{\cos C}=\frac{b}{\cos B}$，

由正弦定理可得 $\frac{2\sin A-\sin C}{\cos C}=\frac{\sin B}{\cos B}$，

即 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，

所以 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)$，

所以 $2\sin A\cos B=\sin A$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A>0$，

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$；　　　5 分

（2）在 ΔABD 中，设 $\angle BAD=\theta$，由正弦定理 $\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，

所以 $a=4\sin\theta$，$c=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$，

所以 $a+2c=4\left(\sin\theta+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\right)=4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)=4\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

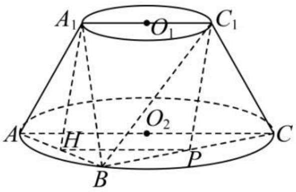
因为 ΔABD 中 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

∴当 $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ 取最大值 1，所以 $a+2c$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$.　　　10 分

18.【答案】(1)答案见解析(2)$\frac{\sqrt{42}}{7}$

【解析】(1) 取 AB 中点 H，连接 A_1H, PH，则有 $PH \parallel AC, PH=\frac{1}{2}AC$，

如图，在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=2A_1C_1$，所以 $HP \parallel A_1C_1, HP=A_1C_1$，



则四边形 A_1C_1PH 为平行四边形，所以 $C_1P \parallel A_1H$，

又 $A_1H \subset$ 平面 $A_1AB, C_1P \not\subset$ 平面 A_1AB，

所以 $C_1P \parallel$ 平面 A_1AB.　　　　　　　　5 分

(2) 过点 B 作 $BO' \perp AC$ 于 O'，

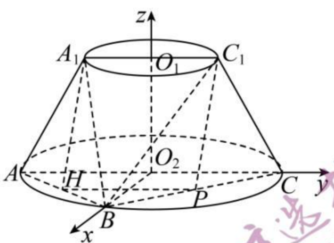
在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$，所以该梯形的高 $h=\sqrt{3}$，

所以等腰梯形 A_1ACC_1 的面积为 $S=3\sqrt{3}$，

所以四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S\times BO'=2\sqrt{3}$，解得 $BO'=2$，

所以点 O' 与 O_2 重合，　　　　　　　　7 分

以 O_2 为原点，$\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2C},\overrightarrow{O_2O_1}$ 方向为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，



则 $C(0,2,0), B(2,0,0), A(0,-2,0), A_1(0,-1,\sqrt{3}), C_1(0,1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3}), \overrightarrow{AB}=(2,2,0), \overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3}), \overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，

设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，平面 C_1CB 的法向量为 $\vec{b}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}-y+\sqrt{3}z=0\\-2x+2y=0\end{cases}$，取$z=1$，则$\vec{b}=\left(\sqrt{3},\sqrt{3},1\right)$.

设直线AB与平面C_1CB夹角为α，

则$\sin\alpha=\left|\cos<\vec{a},\vec{b}>\right|=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+0\right|}{\sqrt{4+4+0}\times\sqrt{3+3+1}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

故直线AB与平面C_1CB夹角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.　　12 分

19.【答案】

（1）①当$a\le 0$时,$f(x)$在R上递减;②当$a>0$时,$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上递减，在$(-\ln a,+\infty)$上递增.

（2）$0<a<\dfrac{1}{e}$.

【解析】（1）求导$f'\left(x\right)=ae^x-1$

① 当$a\le 0$时，$f'\left(x\right)<0$，$f(x)$在R上递减；　　2 分

②当$a>0$时，

当$x\in\left(-\infty,-\ln a\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上递减，

当$x\in(-\ln a,+\infty)$时，$f'\left(x\right)>0$，此时函数$f(x)$在$(-\ln a,+\infty)$上递增.　　5 分

（2）等价于$g\left(x\right)=axe^x-\left(\ln x+x\right)=axe^x-\ln\left(xe^x\right)\left(x>0\right)$有两个零点，

令$t=xe^x,\left(x>0\right)$，则$t'=\left(x+1\right)e^x>0$在$x>0$时恒成立，所以$t=xe^x$在$x>0$时单调递增，故$t>0$，

所以$g\left(x\right)=axe^x-\ln\left(xe^x\right)$有两个零点

$\Leftrightarrow T\left(t\right)=at-\ln t$有两个零点

$\Leftrightarrow a=\dfrac{\ln t}{t}$有两个不同的实数解

$\Leftrightarrow y=a$与$h(\mathrm{t})=\dfrac{\ln t}{t}$有两个交点,

$h'(\mathrm{t})=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，$h'(t)>0$得$0<t<e$，$h'(\mathrm{t})<0$得$e<t$，所以$h(\mathrm{t})=\dfrac{\ln t}{t}$在$\left(0，e\right)$单调递增，在$\left(e,+\infty\right)$上单调递减。$h(e)=\dfrac{1}{e}$，当$t\to 0^+\Rightarrow h(t)\to-\infty$，$t\to+\infty\Rightarrow h(t)\to 0$，所以$0<a<\dfrac{1}{e}$.

12 分

20.【答案】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$P_n=\dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{1}{3})^{n-1}+\dfrac{1}{2}$.

【解析】（1）设第 1 次由甲组答题记作事件 A，则第 1 次由乙组答题记作事件 $\overline{A}$，第 2 次由乙组答题记作事件 B，

∵答对的题数之和为 3 的倍数分别为 $1+2$，$2+4$，$1+5$，$4+5$，$3+3$，$6+6$，$3+6$，

∴其概率为 $\frac{5\times2+2}{36}=\frac{1}{3}$，

则答对的题数之和不是 3 的倍数的概率为 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

则 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.　　6 分

（2）第 $(n+1)$ 次由甲组答题，是第 n 次由甲组答题，第 $(n+1)$ 次继续由甲组答题的事件与第 n 次由乙组答题，第 $(n+1)$ 次由甲组答题的事件和，它们互斥，又各次答题相互独立，

所以第 n 次由甲组答题，第 $(n+1)$ 次继续由甲组答题的概率为 $\frac{1}{3}P_n$，

第 n 次由乙组答题，第 $(n+1)$ 次由甲组答题的概率为 $\frac{2}{3}(1-P_n)$，

因此 $P_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}(1-P_n)=-\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}(n\in N^*)$，　　9 分

则 $P_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}(P_n-\frac{1}{2})$

因为第一次由甲组开始，则 $P_1=1$，

所以 $\{P_n-\frac{1}{2}\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1}$，即 $P_n=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{2}$.　　12 分

21. 【答案】（1）$\therefore a_n=2^{3n-4}$；（2）$q=2$.

【解析】（1）∵ $4a_2=a_1a_3$，∴ $4a_2=a_2^2$，解得 $a_2=4$，∴ $T_3=a_2^3=64$，

又 $S_2=b_1+b_2=\frac{2}{\log_q a_1}+\frac{6}{\log_q a_1+1}$，

$\therefore S_2+T_3=\dfrac{2}{\log_q a_1}+\dfrac{6}{\log_q a_1+1}+64=67$，

即$3(\log_q a_1)^2-5\log_q a_1-2=0$，解得$\log_q a_1=-\dfrac{1}{3}$或$\log_q a_1=2$，

$\therefore a_1=q^{-\frac{1}{3}}$或$a_1=q^2$，

又$a_2=a_1q=4$，$\therefore q=8$或$q=\sqrt[3]{4}$（舍去）$\therefore a_1=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{3n-4}$.　　　6 分

（2）$\because \{b_n\}$为等差数列，$\therefore 2b_2=b_1+b_3$，

即$\dfrac{12}{\log_q a_1+1}=\dfrac{2}{\log_q a_1}+\dfrac{12}{\log_q a_1+2}$，解得$\log_q a_1=1$或$\log_q a_1=2$，

$\therefore a_1=q$或$a_1=q^2$，$\therefore a_n=q^n$或$a_n=q^{n+1}$　　　8 分

①当$a_n=q^n$时，$b_n=\dfrac{n^2+n}{\log_q a_n}=n+1$，易证$\{b_n\}$是等差数列，$S_{99}=\dfrac{(2+100)\times 99}{2}=51\times 99$，

$\log_2 T_{99}=\log_2 q^{99\times 50}=99\times 50\log_2 q$

又$S_{99}-\log_2 T_{99}=99$，得$51-50\log_2 q=1$，解得$q=2$　　　10 分

②当$a_n=q^{n+1}$时，$b_n=\dfrac{n^2+n}{\log_q a_n}=n$，易证$\{b_n\}$是等差数列，$S_{99}=\dfrac{(1+99)\times 99}{2}=50\times 99$，

$\log_2 T_{99}=\log_2 q^{99\times 51}=99\times 51\log_2 q$

又$S_{99}-\log_2 T_{99}=99$，得$50-51\log_2 q=1$，解得$q=2^{\frac{49}{51}}\notin N^*$，舍去

综上，$q=2$.　　　12 分

22.【答案】（1）$p=2$；（2）①见解析；②$\dfrac{|PC|\cdot|AB|}{|PB|\cdot|CD|}=1$.

【解析】(1) 将$y=\dfrac{x_0}{2}x-y_0$代入$x^2=2py$，

化简得$x^2-px_0x+2py_0=0.(*)$

方程(*)的判判式$\Delta=p^2{x_0}^2-8py_0=0$，

由于点$M(x_0,y_0)$在抛物线E上，${x_0}^2=2py_0$且$p>0$，所以$p=2$.　　　4 分

(2) 由（1）知抛物线 $E:x^2=4y$，

①证明：设 $P(m,-1)$，切线的方程为 $y+1=k(x-m)$，

与抛物线 $x^2=4y$ 联立，可得 $x^2-4kx+4km+4=0$，

由 $\Delta=0$，即 $16k^2-16(km+1)=0$，

可得 $k^2-km-1=0$，

所以 $k_1k_2=-1$，$k_1+k_2=m$，

即 $PA\perp PB$；　　7 分

②设直线 PA 的斜率为 k_1，$k_1>0$，倾斜角为 θ_1，

直线 PB 的斜率为 k_2，$k_2<0$，倾斜角为 θ_2，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

直线 AB 的斜率为 K，倾斜角为 θ，

则 $K=\tan\theta=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1+x_2}{4}$，

由 $x^2-4kx+4km+4=0$ 有唯一解，则解为 $x=2k$，

可得 $x_1=2k_1$，同理可得 $x_2=2k_2$，

所以 $K=\dfrac{x_1+x_2}{4}=\dfrac{2k_1+2k_2}{4}=\dfrac{m}{2}$，

因为 $\tan\angle PCD=\tan\theta_1=k_1$，

$$\tan\angle PBA=\tan(\theta-\theta_2)=\frac{\tan\theta-\tan\theta_2}{1+\tan\theta\tan\theta_2}=\frac{\frac{m}{2}-k_2}{1+\frac{mk_2}{2}}=\frac{m-2k_2}{2+mk_2},$$

所以 $\tan\angle PBA-\tan\angle PCD=\dfrac{m-2k_2}{2+mk_2}-k_1=\dfrac{m-2k_2-k_1(2+mk_2)}{2+mk_2}=\dfrac{2m-2m}{2+mk_2}=0$，

则 $\tan\angle PBA=\tan\angle PCD$，即 $\angle PBA=\angle PCD$，

又 $PA\perp PB$，

所以 $\mathrm{Rt}\Delta PBA\backsim\mathrm{Rt}\Delta PCD$，

所以 $\dfrac{|PB|}{|PC|}=\dfrac{|AB|}{|CD|}$，即有 $\dfrac{|PC|\cdot|AB|}{|PB|\cdot|CD|}=1$.　　12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。