

2016 年北京大学生命科学冬令营试卷数学部分

兰琦

2017 年 1 月 4 日

注意：所有题目均为单项选择题，共 20 小题.

1. 已知函数 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是严格单调函数，则满足 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和是 ()

A. -1 B. -3 C. -5 D. -8

解析 D.

根据题意，有

$$x = \frac{x+3}{x+4}, \text{ 或 } x = -\frac{x+3}{x+4},$$

即

$$x^2 + 3x - 3 = 0, \text{ 或 } x^2 + 5x + 3 = 0,$$

于是题中方程的所有解之和为 $(-3) + (-5) = -8$.

2. 设集合 $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{x \mid x = \frac{1}{4}k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则 A 与 B 的关系是 ()

A. A 是 B 在有理数集中的补集

B. A 是 B 的真子集

C. B 是 A 的真子集

D. 以上均不对

解析 B.

注 此题来源于 2002 年全国卷的第 5 题:

设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{1}{4}k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则 ()

A. $M = N$

B. $M \subsetneq N$

C. $M \supsetneq N$

D. $M \cap N = \emptyset$

3. 方程 $x^2 - (3a+2)x + 2a - 1 = 0$ 的两个实根中一个大于 3, 另一个小于 3, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a > \frac{2}{7}$

B. $a > \frac{2}{9}$

C. $a < \frac{2}{7}$

D. $a < \frac{2}{9}$

解析 A.

设 $f(x) = x^2 - (3a+2)x + 2a - 1$, 则问题等价于 $f(3) < 0$, 解得 $a > \frac{2}{7}$.

4. 设实数 a, b, c 均不为 0, 且满足 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$, 则 $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{8}$

B. 1

C. -1

D. 以上均不对

解析 D.

设 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k$, 则

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{k^3}.$$

若 $a-b=0$, 则有 $a=b=c$, 于是 $k=2$, 所求代数式的值为 $\frac{1}{8}$;

若 $a-b \neq 0$, 则根据合分比定理, 有

$$k = \frac{(b+c) - (c+a)}{a-b} = -1,$$

此时 $a+b+c=0$, 所求代数式的值为 -1 .

5. 设 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, 则 $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = (\quad)$
 A. $\cos \frac{\alpha}{2}$ B. $\sin \frac{\alpha}{2}$ C. $-\cos \frac{\alpha}{2}$ D. $-\sin \frac{\alpha}{2}$

解析 C.

显然原式等于 $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$, 而 $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, 于是 $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$.

6. 设一个圆锥的底面积为 10, 它的侧面展开成平面图后为一个半圆, 则此圆锥的侧面积是 ()
 A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

解析 B.

设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 则有

$$\begin{cases} \pi l = 2\pi r, \\ \pi r^2 = 10, \end{cases}$$

从而此圆锥的侧面积为

$$\frac{1}{2}\pi l^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4r^2 = 20.$$

7. 设 $a \geq 1$, 且对任意 $x \in [1, 2]$, 不等式 $x|x-a| + \frac{3}{2} \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $\left[1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[1, \frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ D. 以上均不对

解析 A.

令 $f(x) = x|x-a| + \frac{3}{2}$.

情形一 若 $1 \leq a \leq 2$, 则

$$f(x)_{\min} = f(a) = \frac{3}{2},$$

故此时 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

情形二 若 $a > 2$, 则 $f(x) = x(a-x) + \frac{3}{2}$, 此时原问题等价于 $\begin{cases} f(1) \geq a, \\ f(2) \geq a, \end{cases}$ 解得 $a \geq \frac{5}{2}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left[1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

8. 设 $m > 0$, $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$, $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 则 m 的取值范围是 ()

A. $[1, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$ C. $[6, +\infty)$ D. $[9, +\infty)$

解析 D.

由题意知 p 是 q 的充分不必要条件. $p: -2 \leq x \leq 10$, 设 $f(x) = x^2 - 2x + 1 - m^2$, 则 $f(-2) \leq 0$, $f(10) \leq 0$ 且 $f(-2)$ 和 $f(10)$ 不同时为 0, 解得 $m \geq 9$.

9. 设 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 把复数 $z_1 = 2 \sin \theta + i \cos \theta$ 在复平面上对应的向量按顺时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后得到的复数为

$z_2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, 那么 $\tan \varphi = ()$

A. $\frac{2 \tan \theta + 1}{2 \tan \theta - 1}$ B. $\frac{2 \tan \theta - 1}{2 \tan \theta + 1}$ C. $\frac{1}{2 \tan \theta + 1}$ D. $\frac{1}{2 \tan \theta - 1}$

解析 A.

由题意, 设 $\arg z = \alpha$, 则 $\tan \alpha = \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta}$, φ 的终边与 $\alpha - \frac{3\pi}{4}$ 的终边重合, 所以

$$\tan \varphi = \tan \left(\alpha - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{2 \tan \theta + 1}{2 \tan \theta - 1}.$$

10. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$ 的最大值与最小值的和是 ()

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $-\frac{2}{3}$

解析 B.

方法一 根据题意, 当 $x = -1$ 时, 有 $f(x) = 1$; 当 $x \neq -1$ 时, 有

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x + 1 + \frac{1}{x + 1} - 1},$$

于是 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5}{3}$, 最小值为 -1 .

方法二 设 $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$, 则有

$$(y - 1)x^2 + (y + 1)x + y + 1 = 0,$$

进而

$$\Delta = (y + 1)^2 - 4(y - 1)(y + 1) = (y + 1)(-3y + 5) \geq 0,$$

于是 y 的最大值为 $\frac{5}{3}$, 最小值为 -1 .

11. 设 m, n 为任意正整数, 函数 $f(m, n)$ 的取值也是正整数, 且满足 $f(1, 1) = 1$, $f(m, n+1) = f(m, n) + 2$, $f(m+1, 1) = 2f(m, 1)$, 则 $f(2016, 2015) = ()$

A. $2^{2015} + 2015$ B. $2^{2016} + 2016$ C. $2^{2015} + 4028$ D. $2^{2016} + 4028$

解析 C.

由题意,

$$f(2016, 2015) = f(2016, 1) + 2 \cdot 2014 = f(1, 1) \cdot 2^{2015} + 4028 = 2^{2015} + 4028.$$

12. 设有命题 A, B, C, D, E ，其中 A 是 B 的充分条件， B 是 C 的充要条件， $\neg A$ 是 E 的充分条件， D 是 C 的必要条件，则 D 是 $\neg E$ 的 ()
- A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

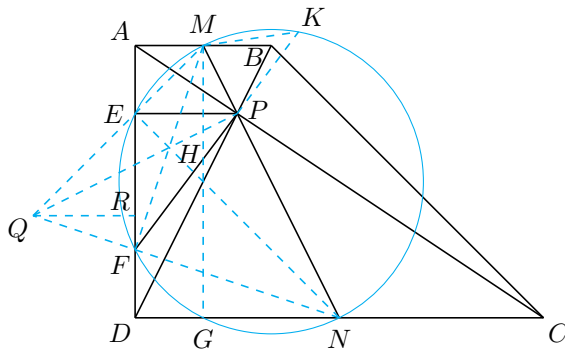
解析 B.

注意 $\neg E$ 是 A 的充分条件，于是有 $\neg E \Rightarrow A \Rightarrow B \Leftrightarrow C \Rightarrow D$.

13. 设直角梯形的高为 2，其两条对角线交点为 P ，以它的两底中点的连线为直径的圆与此梯形的直腰相交于点 E 和 F ，则 P 到 E 和 F 这两点的距离之和为 ()
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. 以上均不对

解析 B.

方法一 如图，直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = 2$ ， $AB = 2a$ ， $CD = 2b$ ． M, N 分别为线段 AB, CD 的中点，对角线 AC 与 BD 交于点 P ．以 MN 为直径的圆与线段 AD 交于 E, F 两点，与线段 CD 交于 N, G 两点，连接 MG ．延长 FP ，交圆于点 K ，连接 MK ．设直线 ME 与 NF 交于点 Q ，直线 MF 与 NE 交于点 H ，作 $QR \perp AD$ 于 R ．



易知， M, P, N 三点共线．因为

$$\frac{ME}{EQ} \cdot \frac{QF}{FN} \cdot \frac{NP}{PM} = \frac{a}{QR} \cdot \frac{QR}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$$

故直线 MF, NE, QP 交于一点 H ，而 H 是 $\triangle QMN$ 的垂心，所以

$$\angle EFM = \angle ENM = \angle PFH,$$

因而 $\widehat{ME} = \widehat{MK}$ ，进而有 $PE = PK$ ．因为

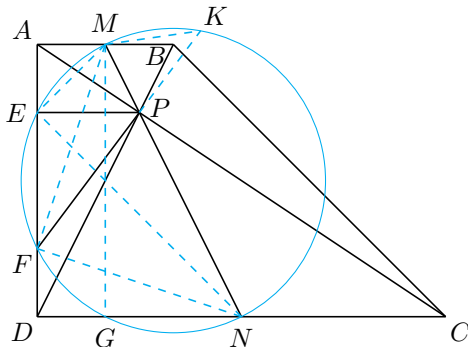
$$\widehat{FK} = \widehat{ME} + \widehat{MK} + \widehat{EF} = \widehat{ME} + \widehat{EF} + \widehat{FG} = \widehat{MG},$$

所以

$$PE + PF = PK + PF = FK = MG = AD = 2.$$

方法二 如图，直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = 2$ ． M, N 分别为线段 AB, CD 的中点，对角线 AC 与 BD 交于点 P ．以 MN 为直径的圆与线段 AD 交于 E, F

两点, 与线段 CD 交于 N, G 两点, 连接 MG . 延长 FP , 交圆于点 K , 连接 MK . 连接 ME 与 NF .



因为

$$\frac{PM}{PN} = \frac{S_{\triangle PME}}{S_{\triangle PNE}} = \frac{EM \cdot \sin \angle MEP}{EN \cdot \sin \angle NEP},$$

而

$$\frac{PM}{PN} = \frac{AM}{DN} = \frac{EM \cdot \sin \angle MEA}{EN \cdot \sin \angle NED},$$

所以 $\frac{\sin \angle MEP}{\sin \angle NEP} = \frac{\sin \angle MEA}{\sin \angle NED}$. 又因为 $\angle MEP + \angle NEP = 90^\circ$, $\angle MEA + \angle NED = 90^\circ$, 所以

$$\angle MEP = \angle MEA, \angle NEP = \angle NED,$$

同理,

$$\angle NFP = \angle NFD, \angle MFP = \angle MFA,$$

故 $\widehat{ME} = \widehat{MK}$, 进而有 $ME = MK$, $PE = PK$. 又因为 $\widehat{KF} = \widehat{MG}$, 所以

$$PE + PF = PK + PF = FK = MG = AD = 2.$$

注 若设点 M, N 是以点 P 为焦点, 直线 AD 为准线的双曲线上的两点, 则此题相当于证明了双曲线的一条性质: 若以双曲线的一条焦点弦 MN 为直径的圆与对应准线相交于两点 E, F , 则焦点 P 到两个交点 E, F 的距离之和等于焦点弦在准线上的投影长. 抛物线也有类似的性质.

14. 一种正十二面体的骰子, 12 个表面分别写有 1 到 12 的 12 个数字, 则扔一对这样的骰子, 可能出现的结果种数是 ()

A. 144

B. 132

C. 72

D. 78

解析 D.

$$C_{12}^1 + C_{12}^2 = 78.$$

15. 设实数 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{2016} > 1$, 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2016} = 2018$, 则 $\ln(x_1) \ln(x_{2016})$ 与 $\frac{1}{2015}$ 的大小关系是 ()

A. $\ln(x_1) \ln(x_{2016}) > \frac{1}{2015}$

B. $\ln(x_1) \ln(x_{2016}) = \frac{1}{2015}$

C. $\ln(x_1) \ln(x_{2016}) < \frac{1}{2015}$

D. 以上都有可能

解析 C.

令 $t_i = x_i - 1 > 0 (i = 1, 2, \dots, 2016)$, 则

$$\ln x_1 \ln x_{2016} = \ln(1+t_1) \ln(1+t_{2016}) < t_1 \cdot t_{2016} \leq t_1 \cdot \frac{2-t_1}{2015} \leq \frac{1}{2015}.$$

16. 设角 $\alpha = \frac{\pi}{7}$, 则 $\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha$ 的值为 ()

A. $\frac{7}{4}$

B. 1

C. $\frac{7}{8}$

D. 以上均不对

解析 A.

由半角公式得

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha),$$

记 $A = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha$, 则有

$$2 \sin 2\alpha \cdot A = \sin 4\alpha + (\sin 6\alpha - \sin 2\alpha) + (\sin 8\alpha - \sin 4\alpha).$$

而 $\sin 6\alpha + \sin 8\alpha = 0$, 所以

$$2 \sin 2\alpha \cdot A = -\sin 2\alpha \Rightarrow A = -\frac{1}{2},$$

从而得所求代数式的值为 $\frac{7}{4}$.

17. 已知 $x > 0$ 时, 不等式 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $0 \leq a \leq \frac{3}{2}$

B. $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$

C. $a = \frac{3}{2}$

D. 不存在这样的 a

解析 C.

分别考虑直线 $y = (a-1)x-1$ 与二次函数 $y = x^2-ax-1$ 的草图, 因为二次函数一定存在一个正零点与一个负零点, 所以直线斜率为正, 且直线与 x 轴的交点必与二次函数的正零点重合, 即 $\frac{1}{a-1}$ 是方程 $x^2-ax-1=0$ 的解, 代入解得 $a = \frac{3}{2}$.

也可以考虑不等式, 显然有 $a > 1$, 题中不等式可以变形为

$$\left(x - \frac{1}{a-1}\right)(x-x_1)(x-x_2) \geq 0,$$

其中 x_1, x_2 是方程 $x^2-ax-1=0$ 的两根, 因为 $x_1 x_2 < 0$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 就有 $x_1 < 0 < x_2$.

而 $x > 0$, 所以 $x-x_1 > 0$ 恒成立, 从而不等式 $\left(x - \frac{1}{a-1}\right)(x-x_2) \geq 0$ 对 $x > 0$ 恒成立, 因为 $\frac{1}{a-1} > 0, x_2 > 0$, 所以只能有 $\frac{1}{a-1} = x_2$, 以下同上.

18. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\sin \beta = 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, 则 $\tan \beta$ 具有 ()

A. 最大值 $\sqrt{3}$

B. 最小值 $\sqrt{3}$

C. 取不到最大或最小值

D. 以上均不对

解析 D.

因为

$$\sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha,$$

所以由题中条件得 $\tan(\alpha + \beta) = 3 \tan \alpha$. 从而解得

$$\tan \beta = \frac{2 \tan \alpha}{3 \tan^2 \alpha + 1} = \frac{2}{3 \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

即 $\tan \beta$ 有最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ 时取到. $\tan \beta$ 取不到最小值, 当 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan \beta \rightarrow 0$.

19. 设实数 a, b, c 满足 $a, b, c \geq 1$ 且 $ab\sqrt{c-1} + ac\sqrt{b-1} + bc\sqrt{a-1} = \frac{3}{2}abc$, 则 a, b, c 之间的大小关系是 ()

A. $a > b > c$

B. $a = b = c$

C. $a < b < c$

D. 不能比较大小

解析 B.

题中等式可以变形为

$$\sqrt{\frac{c-1}{c^2}} + \sqrt{\frac{b-1}{b^2}} + \sqrt{\frac{a-1}{a^2}} \leq \frac{3}{2},$$

而 $\sqrt{\frac{c-1}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2}$, 所以只能有

$$\sqrt{\frac{c-1}{c^2}} = \sqrt{\frac{b-1}{b^2}} = \sqrt{\frac{a-1}{a^2}} = \frac{1}{2},$$

解得 $a = b = c = 2$.

也可以换元, 令

$$x = \sqrt{a-1}, y = \sqrt{b-1}, z = \sqrt{c-1},$$

则有 $x, y, z \geq 0$ 且题中条件变为

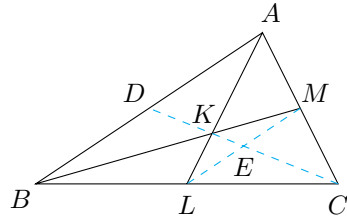
$$\begin{aligned} \sum_{cyc} 2z(x^2+1)(y^2+1) &= 3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \\ &\leq \sum_{cyc} (z^2+1)(x^2+1)(y^2+1) \\ &= 3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1). \end{aligned}$$

所以等号必须成立, 有 $x = y = z = 1$, 从而 $a = b = c = 2$.

20. 设三角形 ABC 的中线 AL 与 BM 相交于点 K , 若 K, L, C, M 四点共圆, 则 $\frac{AB}{KC}$ 的值是 ()
- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 不能确定

解析 C.

连结 CK 并延长, 使它交 AB 边于点 D , 连结 LM , 交 CD 于点 E , 如图:



由题意知 K 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 D 为 AB 的中点, E 为 CD 的中点, 也为 LM 的中点, 且 K 为 CD 的靠近 D 的三等分点. 记 $KE = m$, 则 $CD = 6m, CE = 3m$.

因为 K, L, C, M 四点共圆, 由相交弦定理知

$$ME \cdot LE = KE \cdot CE = 3m^2,$$

解得 $ME = LE = \sqrt{3}m$. 从而有

$$\frac{AB}{KC} = \frac{2LM}{m + 3m} = \frac{4\sqrt{3}m}{4m} = \sqrt{3}.$$