2017年全国高中数学联合竞赛加试（B卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、（本题满分40分） 设实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$．令 $d=\max\{|a|,|b|,|c|\}$．证明：

$$\left|(1+a)(1+b)(1+c)\right|\geq 1-d^2.$$

证明： 当 $d\geq 1$ 时，不等式显然成立. ……………………10分

以下设 $0\leq d<1$．不妨设 a, b 不异号，即 $ab\geq 0$，那么有

$$(1+a)(1+b)=1+a+b+ab\geq 1+a+b=1-c\geq 1-d>0.$$

……………………20分

因此

$$\left|(1+a)(1+b)(1+c)\right|\geq\left|(1-c)(1+c)\right|=1-c^2=1-|c|^2\geq 1-d^2.$$

……………………40分

二、（本题满分40分） 给定正整数 m，证明：存在正整数 k，使得可将正整数集 $\mathbf{N}_+$ 分拆为 k 个互不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，每个子集 A_i 中均不存在4个数 a,b,c,d（可以相同），满足 $ab-cd=m$．

证明： 取 $k=m+1$，令 $A_i=\left\{x\,\middle|\,x\equiv i\ (\bmod m+1),\ x\in\mathbf{N}_+\right\}$，$i=1,2,\cdots,m+1$．

……………………20分

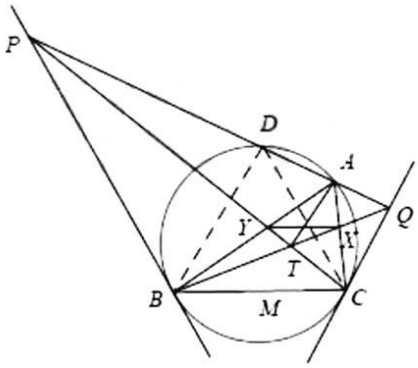
设 $a,b,c,d\in A_i$，则

$$ab-cd\equiv i\cdot i-i\cdot i=0\ (\bmod m+1),$$

故 $m+1\mid ab-cd$，而 $m+1\nmid m$，所以在 A_i 中不存在4个数 a,b,c,d，满足 $ab-cd=m$． ……………………40分

三、（本题满分 50 分） 如图，点 D 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆 ω 上弧 BC 的中点，直线 DA 与圆 ω 过点 B,C 的切线分别相交于点 P,Q，BQ 与 AC 的交点为 X，CP 与 AB 的交点为 Y，BQ 与 CP 的交点为 T．求证：AT 平分线段 XY．

（答题时请将图画在答卷纸上）



证明： 首先证明 $YX \parallel BC$，即证 $\dfrac{AX}{XC}=\dfrac{AY}{YB}$.

连接 BD、CD．因为

$$\frac{S_{\Delta ACQ}}{S_{\Delta ABC}}\cdot\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABP}}=\frac{S_{\Delta ACQ}}{S_{\Delta ABP}},$$

所以 $$\frac{\frac{1}{2}AC\cdot CQ\sin\angle ACQ}{\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC}\cdot\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB}{\frac{1}{2}AB\cdot BP\sin\angle ABP}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot AQ\sin\angle CAQ}{\frac{1}{2}AB\cdot AP\sin\angle BAP},\qquad ①$$

由题设，BP、CQ 是圆 ω 的切线，所以 $\angle ACQ=\angle ABC$、$\angle ACB=\angle ABP$， 又 $\angle CAQ=\angle DBC=\angle DCB=\angle BAP$（注意 D 是弧 BC 的中点），于是由①知

$$\frac{AB\cdot AQ}{AC\cdot AP}=\frac{CQ}{BP}.\qquad ②$$

……………………20 分

因为 $\angle CAQ=\angle BAP$，所以 $\angle BAQ=\angle CAP$，于是

$$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ACP}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AQ\sin\angle BAQ}{\frac{1}{2}AC\cdot AP\sin\angle CAP}=\frac{AB\cdot AQ}{AC\cdot AP},\qquad ③$$

而 $$\frac{S_{\Delta BCQ}}{S_{\Delta BCP}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot CQ\sin\angle BCQ}{\frac{1}{2}BC\cdot BP\sin\angle CBP}=\frac{CQ}{BP},\qquad ④$$

由②，③，④得 $$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ACP}}=\frac{S_{\Delta CBQ}}{S_{\Delta BCP}},$$

即 $$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}}=\frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta BCP}},$$

又 $$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}}=\frac{AX}{XC},\quad \frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta BCP}}=\frac{AY}{YB},$$

故 $\dfrac{AX}{XC}=\dfrac{AY}{YB}$.

……………………40 分

设边 BC 的中点为 M，因为

$$\frac{AX}{XC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BY}{YA}=1,$$

所以由塞瓦定理知，AM, BX, CY 三线共点，交点即为 T，故由 $YX \parallel BC$ 可得，AT 平分线段 XY． ……………………50 分

四、（本题满分 50 分） 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20} \in \{1, 2, \cdots, 5\}$，$b_1, b_2, \cdots, b_{20} \in \{1, 2, \cdots, 10\}$，集合 $X=\{(i, j) \mid 1 \le i < j \le 20,\ (a_i-a_j)(b_i-b_j)<0\}$，求 X 的元素个数的最大值．

解： 考虑一组满足条件的正整数 $(a_1, a_2, \cdots, a_{20}, b_1, b_2, \cdots, b_{20})$．

对 $k=1, 2, \cdots, 5$，设 $a_1, \cdots, a_{20}$ 中取值为 k 的数有 t_k 个．根据 X 的定义，当 $a_i=a_j$ 时，$(i, j) \notin X$，因此至少有 $\sum\limits_{k=1}^{5} \mathrm{C}_{t_k}^2$ 个 (i, j) 不在 X 中．注意到 $\sum\limits_{k=1}^{5} t_k=20$，由柯西不等式，我们有

$$\sum_{k=1}^{5} \mathrm{C}_{t_k}^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{5} t_k^2-\sum_{k=1}^{5} t_k\right) \ge \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{5} t_k\right)^2-\sum_{k=1}^{5} t_k\right)=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot\left(\frac{20}{5}-1\right)=30,$$

从而 X 的元素个数不超过 $\mathrm{C}_{20}^2-30=190-30=160$． ……………………30 分

另一方面，取 $a_{4k-3}=a_{4k-2}=a_{4k-1}=a_{4k}=k\,(k=1, 2, \cdots, 5)$，$b_i=6-a_i\,(i=1, 2, \cdots, 20)$，则对任意 $i, j\,(1 \le i < j \le 20)$，有

$$(a_i-a_j)(b_i-b_j)=(a_i-a_j)((6-a_i)-(6-a_j))=-(a_i-a_j)^2 \le 0,$$

等号成立当且仅当 $a_i=a_j$，这恰好发生 $5\mathrm{C}_4^2=30$ 次．此时 X 的元素个数达到 $\mathrm{C}_{20}^2-30=160$．

综上所述，X 的元素个数的最大值为 160． ……………………50 分