安徽省六校教育研究会2023年高三年级入学素质测试数学

参考答案

1.【答案】D

【解析】$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\frac{z+1}{z}=1+\frac{1}{z}=1+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=1+\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则其在复平面对应的点为

$\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即在第四象限，故选：D

2.【答案】A

【解析】$A=\{(x,y)|xy=1\}$，$B=\{(x,y)|x\in Z,y\in Z\}$，则$A\cap B=\{(1,1),(-1,-1)\}$，

真子集个数为$2^2-1=3$，故选：A

3.【答案】C

【解析】函数$f(x)=a^x$为增函数,则 $a>1$,此时$a-1>0$,故函数$g(x)=x^{a-1}$在$(0,+\infty)$上单调递增;当$g(x)=x^{a-1}$在

$(0,+\infty)$上单调递增时, ,$a-1>0$,所以$a>1$,故$f(x)=a^x$为增函数，故选:C

4.【答案】A

【解析】设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），由椭圆的性质可知椭圆上的点到焦点距离的最小值为$a-c$，最大值为$a+c$，根据题意可得近火点满足$a-c=3395+265=3660$①， 远火点满足$a+c=3395+11945=15340$②，由②-①得$2c=11680$，故选：A

5.【答案】C

【解析】由题意得该容器模型为正四棱台，上、下底面的边长分别为2cm，3cm.

设该棱台的高为h，则由棱台体积公式$V=\frac{1}{3}h\left(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}}\right)$，得：$\frac{19}{3}=\frac{1}{3}\times h\times(4+9+6)$ 得$h=1\text{cm}$，

所以侧面等腰梯形的高$h'=\sqrt{1+\left(\frac{3-2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}(\text{cm})$，所以$S_{表}=4\times\frac{(2+3)\times\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}+9=\left(5\sqrt{5}+9\right)\text{cm}^2$

故选：C

6.【答案】D

【解析】因为$|\overrightarrow{AB}|=|AB|=3,|\overrightarrow{AC}|=|AC|=2$,$\therefore\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{AC}|=\frac{3}{2}$，

设$\overrightarrow{AB_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC_0}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,则$|\overrightarrow{AB_0}|=|\overrightarrow{AC_0}|$，

又$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB_0}+\overrightarrow{AC_0}$，$\therefore AD$在$\angle BAC$的角平分线上，

由于三角形中$|AB|\neq|AC|$， 故三角形的BC边上的中线，高线，中垂线都不与$\angle BAC$的角平分线重合，

故AD经过三角形的内心，而不经过外心，重心，垂心，故选D.

7.【答案】A

【解析】已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°的单位向量，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

所以$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=1$

所以对任意的x_1、$x_2\in(m,+\infty)$，且$x_1<x_2$，$\frac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}>1$，则$x_1\ln x_2-x_2\ln x_1<x_1-x_2$

所以$\frac{\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_1}{x_1}<\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$，即$\frac{\ln x_2-1}{x_2}<\frac{\ln x_1-1}{x_1}$，设$f(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，即$f(x)$在$(m,+\infty)$上单调递减

又$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}=0$，解得$x=e^2$，所以$x\in(0,e^2)$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$x\in(0,e^2)$上单调递增；

$x\in(e^2,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$在$x\in(e^2,+\infty)$上单调递减，所以$m\geq e^2$，故选：A.

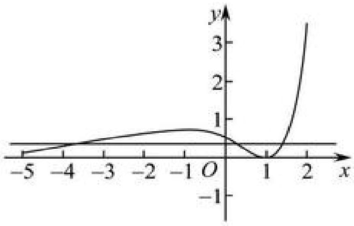
8.【答案】C

【解析】设直线l与曲线$y=e^x$相切于$P(x_0,y_0)$，又$y'=e^x$，所以直线l的斜率为$k=e^{x_0}$，方程为$y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$，

令$x=0$，$y=(1-x_0)e^{x_0}$；令$y=0$，$x=x_0-1$，即$A(x_0-1,0)$，$B(0,(1-x_0)e^{x_0})$.

所以$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|=\frac{1}{2}\times|x_0-1|\times|(1-x_0)e^{x_0}|=\frac{1}{2}(1-x_0)^2e^{x_0}$.

设$f(x)=\frac{1}{2}(1-x)^2e^x$，则$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-2(1-x)+(1-x)^2\right]e^x=\frac{1}{2}\left[(x+1)(x-1)\right]e^x$.



由$f'(x)>0$，解得$x<-1$或$x>1$；由$f'(x)<0$，解得$-1<x<1$.

所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减.

$f(-1)=\frac{2}{e}>\frac{1}{e}$，$f(-4)=\frac{25}{2e^4}=\frac{25}{2e^3}\times\frac{1}{e}<\frac{1}{e}$，$f(1)=0$，$f(2)=\frac{e^2}{2}>\frac{1}{e}$，且恒有$f(x)\geq0$成立，

如图，函数$f(x)$与直线$y=\frac{1}{e}$有3个交点.所以点P的个数为3，故选：C.

9.【答案】AB

【解析】对于A，由相关指数的定义知：R^2越大，模型的拟合效果越好，A正确；

对于B，残差点所在的带状区域宽度越窄，则残差平方和越小，模型拟合精度越高，B正确；

对于C，由独立性检验的思想知：χ^2值越大，"x与y有关系"的把握程度越大，C错误.

对于D，$\because E(3X+1)=3E(X)+1=6$，$\therefore E(X)=\frac{5}{3}$，又$X\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，

$\therefore E(X)=\frac{n}{3}=\frac{5}{3}$，解得：$n=5$，D错误.故选：AB.

10.【答案】BC

【解析】$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，则$f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$，由题意得$f(2\pi)=f'(2\pi)$，即$A\sin\varphi=A\omega\cos\varphi$，故

$\tan\varphi=\omega$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{3}$，所以$\tan\varphi=\omega<\sqrt{3}$，由$\omega\in N^*$则，$\omega=1$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，故选项A错误；

因为破碎的涌潮的波谷为-4，所以$f'(x)$的最小值为-4，即$-A\omega=-4$，得$A=4$，所以$f(x)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$， 故选项 B 正确；

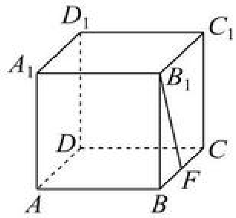
因为 $f(x)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f'(x)=4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f'\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin x$ 为奇函数 ，则选项 C 正确；

$f'(x)=4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $-\frac{\pi}{3}<x<0$， 得 $-\frac{\pi}{12}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$， 因为函数 $y=4\cos x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 上单调递增，

在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，所以 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 上不单调，则选项 D 错误，故选：BC

11.【答案】BCD

【解析】对于 A 项，$\because DD_1//BB_1$

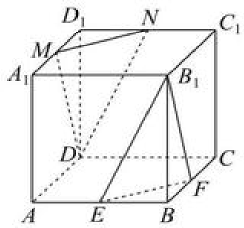


$\therefore$ 在 Rt△BB_1F 中 $\angle BB_1F$ 即为异面直线 DD_1 与 B_1F 所成的角，

$\therefore \cos\angle BB_1F=\frac{BB_1}{B_1F}=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$\therefore$ 异面直线 DD_1 与 B_1F 所成的角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故 A 项错误；

对于 B 项，取 A_1D_1 的中点 M，D_1C_1 的中点 N，连接 MN，DM，DN，



则 $DM//B_1F$，$DN//B_1E$，

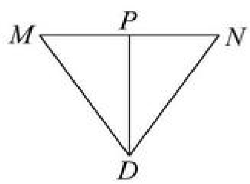
又 $\because DM\not\subset$ 面 B1EF，$B_1F\subset$ 面 B1EF，$DN\not\subset$ 面 B_1EF，$B_1E\subset$ 面 B_1EF，

$\therefore DM//$ 面 B_1EF，$DN//$ 面 B_1EF，

又 $\because DM\cap DN=D$，DM、$DN\subset$ 面 DMN，$\therefore$ 面 DMN$//$ 面 B_1EF，

又 $\because DP//$ 面 B_1EF，$P\in$ 面 $A_1B_1C_1D_1$ $\therefore$ P 轨迹为线段 MN，

$\therefore$ 在△DMN 中，过 D 作 $DP\perp MN$，此时 DP 取得最小值，



在 Rt△DD_1M 中，$D_1M=1$，$D_1D=2$，$\therefore DM=\sqrt{5}$，

在 Rt△DD_1N 中，$D_1N=1$，$D_1D=2$，$\therefore DN=\sqrt{5}$，

在 Rt△MD_1N 中，$D_1N=1$，$D_1M=1$，$\therefore MN=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 如图，在 Rt△DPN 中，$DP=\sqrt{DN^2-(\frac{MN}{2})^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.故 B 项正确；

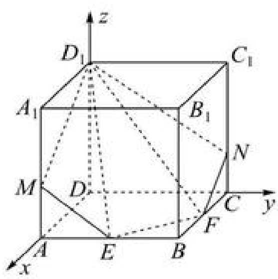
对于 C 项，过点 D_1、E、F 的平面截正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形为五边形 D_1MEFN

则 $D_1M//NF$，$D_1N//ME$，如图，以 D 为原点，分别以 DA、DC、DD_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 D—xyz，

设 AM=m，CN=n，则 $M(2,0,m)$，$N(0,2,n)$，$E(2,1,0)$，$F(1,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，

$\therefore \overrightarrow{ME}=(0,1,-m),\overrightarrow{D_1N}=(0,2,n-2),\overrightarrow{D_1M}=(2,0,m-2),\overrightarrow{NF}=(1,0,-n)$，

$\because D_1M//NF$，$D_1N//ME$，



$\therefore \begin{cases} -2m=n-2 \\ -2n=m-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{2}{3} \\ n=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\therefore AM=\dfrac{2}{3},CN=\dfrac{2}{3}$ $\therefore A_1M=\dfrac{4}{3},C_1N=\dfrac{4}{3}$

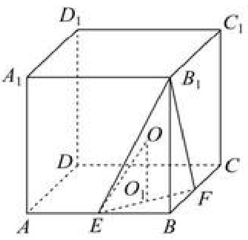
∴在 Rt△D_1A_1M 中，$D_1A_1=2$，$A_1M=\dfrac{4}{3}$，$\therefore D_1M=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$，同理：$D_1N=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$，

在 Rt△MAE 中，$AM=\dfrac{2}{3}$，AE=1，$\therefore ME=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，同理：$FN=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

在 Rt△EBF 中，BE=BF=1，$\therefore EF=\sqrt{2}$，

$\therefore D_1M+D_1N+ME+FN+EF=2\times\dfrac{2\sqrt{13}}{3}+2\times\dfrac{\sqrt{13}}{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{13}+\sqrt{2}$，

即：过点 D_1、E、F 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面周长为 $2\sqrt{13}+\sqrt{2}$.故 C 项正确；



对于 D 项，如图所示，取 EF 的中点 O_1，则 $O_1E=O_1F=O_1B$，过 O_1 作 $OO_1 // BB_1$，

且使得 $OO_1=\dfrac{1}{2}BB_1=1$，则 O 为三棱锥 B_1—BEF 的外接球的球心，

所以 OE 为外接球的半径，

∵在 Rt△EBF 中，$EF=\sqrt{2}$， $\therefore R^2=OE^2=OO_1^2+(\dfrac{EF}{2})^2=1^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{3}{2}$

$\therefore S_{球O}=4\pi R^2=6\pi$.故 D 项正确，故选：BCD.

12.【答案】ABC

【解析】根据题意可知，12 与 1，5，7，11 互质，29 与1、2、3、……28 共 28 个数都互质，

即 $\varphi(12)+\varphi(29)=4+28=32$，所以 A 正确；

由题意知 $\varphi(2)=1,\varphi(4)=2,\varphi(6)=2$，可知数列 $\{\varphi(2n)\}$ 不是单调递增的，B 正确；

若 p 为质数，则小于等于 p^n 的正整数中与 p^n 互质的数为 $1,\cdots,p-1,p+1,\cdots,2p-1,\cdots,2p+1,\cdots\cdots p^n-1$，

即每 p 个数当中就有一个与 p^n 不互质，所以互质的数的数目为 $p^n-\dfrac{p^n}{p}=p^n-p^{n-1}$ 个，

故 $\varphi(p^n)=(p-1)p^{n-1}$，所以 $\dfrac{\varphi(p^n)}{\varphi(p^{n-1})}=\dfrac{(p-1)p^{n-1}}{(p-1)p^{n-2}}=p$ 为常数，即数列 $\{\varphi(p^n)\}$ 为等比数列，故 C 正确；

根据选项 C 即可知 $\varphi(3^n)=2\cdot3^{n-1}$，数列 $\left\{\dfrac{n}{\varphi(3^n)}\right\}$ 的前 4 项和为 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{18}+\dfrac{4}{54}=\dfrac{58}{54}$，故 D 错误，故选：ABC

13.【答案】15

【解析】由题知 $n=6$，则 $T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot(-1)^r\cdot x^{6-\frac{3r}{2}}$，

令 $6-\dfrac{3r}{2}=3$，得 $r=2$，所以展开式中 x^3 的系数为 $C_6^2(-1)^2=15$.

故答案为：15.

14.【答案】1

【解析】因为 $f(x)=(x+m)\ln x(m\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=\ln x+(x+m)\dfrac{1}{x}=\ln x+1+\dfrac{m}{x}$，

曲线在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=\ln1+1+m=1+m$，又 $f(1)=(1+m)\ln1=0$，

则切线方程为：$y=(1+m)(x-1)$，即 $(1+m)x-y-1-m=0$，

若该切线平分圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，则切线过圆心 $(2,1)$，则 $2(1+m)-1-1-m=0$，解得 $m=0$，

所以 $f(x)=x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，即 $\ln x=0$，所以 $x=1$，

则 $y=f(x)$ 有一个零点 $x=1$，

故答案为：1

15.【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】因为 $f(x)=f(|x|)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 $-\dfrac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{2\pi}{3},k\in Z$，

又因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $k=0,\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=3\cos\omega x$，

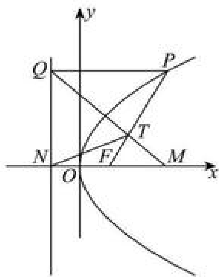
又因为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-3$，所以 $3\cos\dfrac{\pi}{2}\omega=-3$，所以 $\dfrac{\pi}{2}\omega=(2k+1)\pi,k\in Z$，所以 $\omega=2(2k+1)=4k+2,k\in Z$，

又因为 $0<\omega<4$，所以 $k=0,\omega=2$，所以 $f(x)=3\cos2x$，所以 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}$

16.【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】作图如下，



由 $\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{MT}$ 得，$\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{TP}-\overrightarrow{MT}=\vec{0}$，即 $\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{TN}=-\overrightarrow{TP}$，

又因为 $F(1,0)$ 为 $M(3,0)$，$N(-1,0)$ 的中点，所以 $\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{TN}=2\overrightarrow{TF}$，所以 $2\overrightarrow{TF}=-\overrightarrow{TP}$，

所以 T 为 PF 的三等分点，且 $TP=2TF$，又因为 $PQ//MF$，所以 $\triangle TMF\sim\triangle TQP$，且 $\dfrac{MF}{QP}=\dfrac{TF}{TP}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $QP=2MF=4$，不妨设 $P(x_0,y_0)$，且在第一象限，$QP=x_0+\dfrac{p}{2}=x_0+1=4$，所以 $x_0=3$，

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线上，所以 $y_0=2\sqrt{3}$，

所以根据相似关系可得 $y_T=\dfrac{1}{3}y_0=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

17.【答案】(1) $a_n=4n+4$ 或 $a_n=2n$；(2) 见解析.

【解析】(1) 由题意可知，有两种组合满足条件：① $a_1=8$，$a_2=12$，$a_3=16$，此时等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=8$，$d=4$，所以其通项公式为 $a_n=8+(n-1)\times4=4n+4$；② $a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=6$，此时等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，d

=2，所以其通项公式为 $a_n=2n$……………………………………5 分

（2）若选择①，$S_n=\dfrac{n(8+4n+4)}{2}=2n^2+6n$，则 $S_{k+2}=2(k+2)^2+6(k+2)=2k^2+14k+20$. 若 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列，则 ${a_k}^2=a_1\cdot S_{k+2}$，即 $((4k+4)^2=8(2k^2+14k+20)$，整理得 $5k=-9$，此方程无正整数解，故不存在正整数 k，使 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列.

若选择②，$S_n=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n^2+n$，则 $S_{k+2}=(k+2)^2+(k+2)=k^2+5k+6$，若 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列，则 ${a_k}^2=a_1\cdot S_{k+2}$，即 $(2k)^2=2(k^2+5k+6)$，整理得 $k^2-5k-6=0$ $-5k-6=0$，因为 k 为正整数，所以 $k=6$. 故存在正整数 $k=6$，使 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列. ……………………………………10 分

18.【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$ 百米；（2）$\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ 百米.

【解析】（1）因为 P 是等腰三角形 PBC 的顶点，且 $\angle CPB=\dfrac{2\pi}{3}$，

又 $BC=1$，所以 $\angle PCB=\dfrac{\pi}{6}$，$PC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又因为 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\angle ACP=\dfrac{\pi}{3}$，

则在三角形 PAC 中，由余弦定理可得：

$AP^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{3}$，解得 $AP=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，

所以连廊 $AP+PC=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$ 百米； ……………………………………5 分

（2）设正三角形 DEF 的边长为 a，$\angle CEF=\alpha(0<\alpha<\pi)$，

则 $CF=a\sin\alpha$，$AF=\sqrt{3}-a\sin\alpha$，且 $\angle EDB=\alpha$，所以 $\angle ADF=\dfrac{2\pi}{3}-\alpha$，

在三角形 ADF 中，由正弦定理可得：

$\dfrac{DF}{\sin\angle A}=\dfrac{AF}{\sin\angle ADF}$，即 $\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}-a\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}$， ……………………………………8 分

即 $\dfrac{a}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-a\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}$，化简可得 $a\left[2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\alpha\right]=\sqrt{3}$，

所以 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sin(\alpha+\theta)}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$（其中 θ 为锐角，且 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$），

即边长的最小值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 百米，

所以三角形 DEF 连廊长的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ 百米. ……………………………………12 分

19.【答案】（1）14.7%（2）见解析

【解析】（1）设事件 A 为“核酸检测呈阳性”，事件 B 为“患疾病”

由题意可得 $P(A)=0.02, P(B)=0.003$，$P(A|B)=0.98$

由条件概率公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 得：$P(AB)=0.98\times 0.003$

即 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.98\times 0.003}{0.02}=0.147$

故该居民可以确诊为新冠肺炎患者的概率为14.7% ……………………………………6 分

（2）设方案一中每组的检测次数为 X，则 X 的取值为1,6

$P(X=1)=(1-0.02)^5=0.98^5=0.904$，$P(X=6)=1-0.98^5=0.096$

所以 X 的分布列为

X	1	6
P	0.904	0.096

所以 $E(X)=1\times 0.904+6\times 0.096=1.48$

即方案一检测的总次数的期望为 $11\times 1.48=16.28$

设方案二中每组的检测次数为 Y，则 Y 的取值为1,12

$P(Y=1)=(1-0.2)^{11}=0.801$；$P(Y=12)=1-0.801=0.199$

所以 Y 的分布列为

Y	1	12
P	0.801	0.199

所以 $E(Y)=1\times 0.801+12\times 0.199=3.189$

即方案二检测的总次数的期望为 $3.189\times 5=15.945$

由 $16.28>15.945$，则方案二的工作量更少 ……………………………………12 分

20.【答案】(1)证明见解析　(2)存在，$\frac{\sqrt{15}}{5}$

【解析】（1）如图所示：

在图 1 中，连接 AC，交 BE 于 O，因为四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形，

并且 $\angle BCE=60°$，所以 $AC\perp BE$，且 $OA=OC=\sqrt{3}$．

在图 2 中，相交直线 OA，OC_1 均与 BE 垂直，

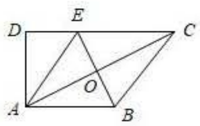


图1

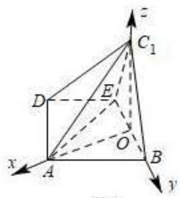


图2

所以 $\angle AOC_1$ 是二面角 $A-BE-C_1$ 的平面角，因为 $AC_1=\sqrt{6}$，

所以 $OA^2+OC_1^2=AC_1^2$，$OA\perp OC_1$，所以平面 $BC_1E\perp$ 平面 $ABED$；……………………………………5 分

（2）由（1）知，分别以OA，OB，OC_1为x，y，z轴建立如图2所示的空间直角坐标系，则$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，

$C_1\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$B\left(0,1,0\right)$，$E\left(0,-1,0\right)$，$\overrightarrow{DC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{3},1,0\right)$，

$\overrightarrow{AC_1}=\left(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\sqrt{3},-1,0\right)$，设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}$，$\lambda\in[0,1]$，

则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$……………………………………8分

设平面ABC_1的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\\overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取$\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},1\right)$，

因为点P到平面ABC_1的距离为$\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以$d=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\lambda\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$，

则$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设直线$EP$与平面$ABC_1$所成的角为$\theta$，

所以直线EP与平面ABC_1所成角的正弦值为$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{EP},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{EP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{EP}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

……………………………………12分

21.【答案】(1)$C_1:\frac{x^2}{2}-y^2=1$，$C_2:y^2=\frac{1}{2}x$；(2)（i）答案见解析；（ii）答案见解析.

【解析】（1）因为$F\left(\sqrt{3},0\right)$，渐近线经过点$\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以$\begin{cases}c=\sqrt{3}\\\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\c^2=a^2+b^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}c=\sqrt{3}\\a=\sqrt{2}\\b=1\end{cases}$，所以$C_1:\frac{x^2}{2}-y^2=1$

抛物线$C_2:y^2=2px$经过点$\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以$2p=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，所以$C_2:y^2=\frac{1}{2}x$ ……………………………4分

（2）（i）因为M,N在不同支,所以直线MN的斜率存在,设方程为$y=kx+m$.

令$M\left(x_1,y_1\right)N\left(x_2,y_2\right)$,联立$\begin{cases}y=kx+m\\\frac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$得，$\left(1-2k^2\right)x^2-4kmx-2m^2-2=0$，则$x_1+x_2=\frac{4km}{1-2k^2},x_1x_2=\frac{-2m^2-2}{1-2k^2}$.

联立C_1,C_2可得$\begin{cases}y^2=\frac{1}{2}x\\\frac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$，解得：$A(2,1)$，因为$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$,所以$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，

代入直线方程及韦达结构整理可得：$12k^2+8km+m^2+2m-3=0$，整理化简得：$(6k+m+3)(2k+m-1)=0$.

因为$A(2,1)$不在直线MN上,所以$2k+m-1\neq0,6k+m+3=0$.

直线 MN 的方程为$y=kx-6k-3=k(x-6)-3$,过定点$B(6,-3)$. ……………………8 分

（ii）因为A,B为定点,且$\angle ADB$为直角，

所以 D 在以 AB 为直径的圆上,AB 的中点$P(4,-1)$即为圆心,半径$|DP|$为定值.

故存在点$P(4,-1)$,使得$|DP|$为定值. ……………………………………12 分

22.【答案】（1）证明见解析；（2）$\left[-\frac{1}{e},\frac{4e^{\frac{\pi}{2}-1}}{\pi^2}\right]$.

【解析】（1）当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^{x-1}$，则$f'(x)=x-e^{x-1}$，

令$g(x)=x-e^{x-1}$，则$g'(x)=1-e^{x-1}$，当$x\in(-\infty,1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，$\therefore g(x)\le g(1)=0$，当$x=1$时$f'(1)=0$，当$x\ne1$时$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$是R上的减函数. ·……………………………………4 分

（2）由题意，$e^{x-1}\ge a(x^2-\cos x)$对于$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$恒成立.

设$h(x)=x^2-\cos x$，则$h'(x)=2x+\sin x$，易知$h'(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上为增函数，

$\therefore h'(x)\ge h'(0)=0$，故$h(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上为增函数，又$h(0)=-1<0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}>0$，

$\therefore$存在唯一的$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$h(x_0)=0$；当$x\in[0,x_0)$时，$h(x)=x^2-\cos x<0$，此时，由$e^{x-1}\ge a(x^2-\cos x)$

得$a\ge\frac{e^{x-1}}{x^2-\cos x}$，令$\varphi(x)=\frac{e^{x-1}}{x^2-\cos x}$，则$\varphi'(x)=\frac{e^{x-1}(x^2-\cos x-2x-\sin x)}{(x^2-\cos x)^2}<0$，

$\therefore\varphi(x)$在$[0,x_0)$上为减函数，则$\varphi(x)_{\max}=\varphi(0)=-\frac{1}{e}$，故$a\ge-\frac{1}{e}$. ……………………………………7 分

当$x=x_0$时，$h(x_0)=x_0^2-\cos x_0=0$，对于$\forall a\in\mathbf{R}$，$e^{x-1}\ge a(x^2-\cos x)$恒成立.

当$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$h(x)=x^2-\cos x>0$，由$e^{x-1}\ge a(x^2-\cos x)$得$a\le\frac{e^{x-1}}{x^2-\cos x}$，

由上知$\varphi'(x)=\frac{e^{x-1}(x^2-\cos x-2x-\sin x)}{(x^2-\cos x)^2}$， ……………………………………9 分

令$m(x)=x^2-\cos x-2x-\sin x$，则$m'(x)=2x+\sin x-2-\cos x$，易知$m'(x)$在$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$上为增函数，

$\because m'(x_0)=2x_0+\sin x_0-2-\cos x_0$，而$h(x_0)=x_0^2-\cos x_0=0$，$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore m'(x_0)=2x_0+\sin x_0-2-x_0^2=-1+\sin x_0-(x_0-1)^2<-1+\sin x_0<0$，又$m'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-1>0$，

$\therefore$存在唯一$x_1\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$m'(x_1)=0$；当$x\in(x_0,x_1)$时，$m'(x)<0$，$m(x)$递减；当$x\in\left(x_1,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，

$m'(x)>0$，$m(x)$递增；$\because m(x_0)=x_0^2-\cos x_0-2x_0-\sin x_0=-2x_0-\sin x_0<0$，

$m\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}-\pi-1<0$，$\therefore m(x)<0$，即$\varphi'(x)<0$，$\therefore \varphi(x)$在$\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right]$为减函数，

$\varphi(x)_{\min}=\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4e^{\frac{\pi}{2}-1}}{\pi^2}$，故$a\le\dfrac{4e^{\frac{\pi}{2}-1}}{\pi^2}$．综上可知，实数$a$的取值范围为$\left[-\dfrac{1}{e},\dfrac{4e^{\frac{\pi}{2}-1}}{\pi^2}\right]$．

………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。