

中学生标准学术能力诊断性测试 2019 年 3 月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 4+3i$ (i 是虚数单位)，则 z 的虚部为 ()

- A. $\frac{1}{2}i$ B. $-\frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N}^+ \mid \frac{x}{4-x} > 0\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{1 - \log_3 x}\}$, 则集合 $A \cap B =$ ()

- A. \emptyset B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{x \mid 0 < x < 3\}$

3. 已知，命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $\ln|x| > 0$; 命题 $q: \forall x < 0$, 总有 $\sin x > x$. 则下列命题中是真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $(\neg p) \wedge q$ C. $p \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

4. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y - 2 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x - \frac{1}{2}y$ 的最大值为 ()

- A. -6 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{3}$ D. 3

5. 我国古代名著《九章算术》中有如下问题：“今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？”意思是：“有个女子善于织布，每天织布数量是前一天的两倍，五天共织布五尺，问这位女子每天分别织布多少？”根据题目的已知条件，求这位女子前四天共织布多少尺 ()

- A. $\frac{40}{31}$ B. $\frac{75}{31}$ C. $\frac{80}{31}$ D. 4

- A. 119 B. 120 C. 164 D. 165

7. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 若将函数图象 $y = f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的解析式为 ()

- A. $g(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ B. $g(x) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$

C. $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$

D. $g(x) = \cos 2x$

8. 定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = f(3-x)$, 当 $x \in (-2, 0)$ 时, $f(x) = e^{-x}$, 则 $f(\frac{2019}{2}) = ()$

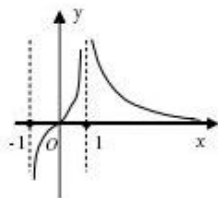
A. $e^{\frac{3}{2}}$

B. $-e^{\frac{3}{2}}$

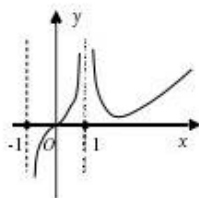
C. $e^{-\frac{3}{2}}$

D. $-e^{-\frac{3}{2}}$

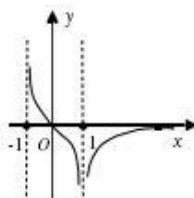
9. 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2 - 2x + 1}$ 的部分图像大致是 ()



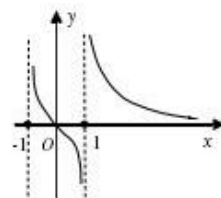
A



B



C



D

10. 已知函数 $y = f(x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 满足 $f(x) < xf'(x)$ (其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数), 则下列不等式成立的是 ()

A. $2f(\frac{1}{2}) < f(1)$

B. $2f(\frac{1}{2}) > f(1)$

C. $f(\frac{1}{2}) < 2f(1)$

D. $f(\frac{1}{2}) > 2f(1)$

11. 已知椭圆 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$, F 为椭圆在 y 轴正半轴的焦点, $M(2, 2)$, P 是椭圆上任意一点, 则 $|PM| + |PF|$ 的最大值为 ()

A. $6 + 2\sqrt{10}$

B. $8 + 2\sqrt{5}$

C. $2 + 2\sqrt{2}$

D. $16 + 2\sqrt{5}$

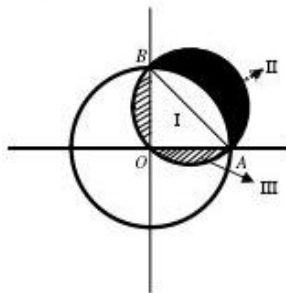
12. 下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的平面几何图形. 此图由两个圆组成, O 为大圆圆心, 线段 AB 为小圆直径, $\triangle AOB$ 的三边所围成的区域记为 I, 黑色月牙部分记为 II, 两个月牙之和 (斜线部分) 记为 III. 在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为 P_1, P_2, P_3 , 则 ()

A. $P_1 > P_2 > P_3$

B. $P_1 = P_2 + P_3$

C. $P_2 > P_1 > P_3$

D. $P_1 = P_2 > P_3$



二、填空题: 本大题共有 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若非零向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

14. 正数项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $S_{n+1}a_{n+1} - S_n a_n = 4a_n^2 - S_n^2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

15. 已知函数 $f(x) = 2x^3 + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x$, 若 $f(3m^2) + f(1 - 4m) \leq 0$, 则实数 m 的取值范围是_____.

16. 要设计一容积为 π 的下端为圆柱形、上端为半球形的密闭储油罐, 已知圆柱侧面的单位面积是下底面的单位面积造价的一半, 而顶部半球面的单位面积造价又是圆柱侧面的单位面积的造价的一半. 储油罐的下部圆柱的底面半径 $R =$ _____ 造价最低.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 3$, $\cos C = -\frac{1}{15}$, $5\sin(B+C) = 3\sin(A+C)$.

(1) 求边 c ;

(2) 求 $\sin(B - \frac{\pi}{3})$ 的值.

18. (12 分) 有甲乙两个班级进行一门课程的考试, 按照学生考试优秀和不优秀统计成绩后, 得到如下列联表:

班级与成绩列联表

	优秀	不优秀	合计
甲班	20		45
乙班		40	
合计			90

(1) 请将上述 2×2 列联表补充完整, 并判断能否在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为成绩与班级有关呢?

(2) 针对调查的 90 名同学, 各班都想办法要提高班级同学的优秀率, 甲班决定从调查的 45 名同学中按分层抽样的方法随机抽取 9 名同学组成学习互助小组, 每单元学习结束后在这 9 人中随机抽取 2 人负责制本单元思维导图, 设这 2 人中优秀人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

参考数据:

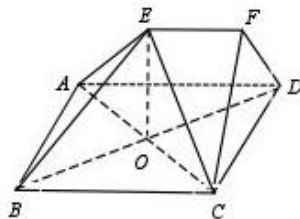
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$

19. (12分) 如图, 封闭多面体 $ABCDFE$, 平行四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , E 在平面 $ABCD$ 的射影为 O , $EF \parallel$ 平面 $ABCD$, 且

$$EF = \frac{1}{2}BC, \text{ 其中 } AB = BC = AC = AE = a.$$

- (1) 求证: 平面 $ABCD \perp$ 平面 CFD ;
- (2) 求多面体 $ACDFE$ 的体积;
- (3) 求二面角 $A-CE-B$ 余弦值.



20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 和 $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 两点.

- (1) 求椭圆的标准方程;
- (2) 已知 P 为椭圆 C 上不同于顶点的任意一点, A, B 为椭圆的左、右顶点, 直线 AP, BP 分别与定直线 $l: x = -6$ 相交于 M, N 两点, 设线段 MN 中点为 Q , 若 $\overline{AQ \cdot BQ}$ 的值最小, 求此时 Q 的坐标.

21. (12分) 已知 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 单调性;
- (2) 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4, 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为

$$\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) + 3 = 0, \text{ 椭圆 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}).$$

- (1) 求直线 l 的直角坐标方程;
- (2) 椭圆 C 上一点到直线 l 的最小距离是多少?

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = |x+1| - |x-2|.$$

- (1) 求不等式 $f(x) < 1$ 的解集;
- (2) 若 $f(x) + 2|x-2| \geq m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注