学校______ 班级______ 姓名______ 考号______

密 封 线 内 不 要 答 题

全国100所名校最新高考模拟示范卷·数学卷(七)

(120分钟　150分)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数z满足$zi=1+i$,则复数z的虚部为

A. 1　　B. i　　C. $-i$　　D. -1

2. 已知集合$A=\{x|-1\leqslant x<3\}$,$B=\{x|\ln(x-2)<1\}$,则$A\cap B=$

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\{x|-1\leqslant x<e+2\}$　　D. $\{x|3<x<e+2\}$

3. 已知两条不同的直线m,n和两个不同的平面α,β,且$m\subset\alpha,n\subset\alpha$,则“$m/\!/\beta$且$n/\!/\beta$”是“$\alpha/\!/\beta$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 中国传统扇文化有着深厚的底蕴,一般情况下,折扇可以看做是从一个圆形中剪下的扇形制作而成的,当折扇所在扇形的弧长与折扇所在扇形的周长的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时,折扇的外观看上去是比较美观的,则此时折扇所在扇形的圆心角的弧度数为

A. $\sqrt{5}+1$　　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　D. $\sqrt{5}-1$

5. 函数$f(x)=(x-2)\cdot e^x$的最小值为

A. -2　　B. $-e$　　C. -1　　D. 0

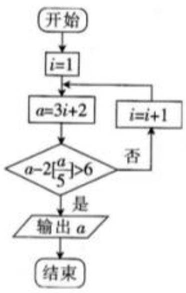
6. 某车站共5个入口,甲、乙、丙三人随机选择入口进站,则3人从同一入口进站的概率为

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{1}{25}$　　D. $\frac{3}{25}$

7. 定义$[x]$表示不超过x的最大整数,例如:$[1.2]=1$,$[\pi]=3$,$[-2.1]=-3$,则执行如图所示的程序框图,输出a的值为

A. 5　　B. 8

C. 11　　D. 14



8. 下列四个函数中既是奇函数,又是增函数的是

A. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$　　B. $f(x)=x^3+x^2$

C. $f(x)=-x|x|$　　D. $f(x)=-\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$

9. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线与抛物线$y^2=8x$的准线围成的三角形的面积为3，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10. 已知某种药物在病人体内的含量在1200 mg以上时才会对某种病情起疗效，现给某病人注射该药物2000 mg，假设药物在病人体内的含量以每小时25%的速度递减，为了保持药物疗效，则经过(　　)小时后须再次向病人体内补充这种药物.(已知lg 2≈0.30，lg 3≈0.48，结果精确到0.1 h)

A. 1.8　　B. 1.9　　C. 2.1　　D. 2.2

11. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，点$A$为函数$f(x)$图象上的一个最高点，点$B,C$为函数$f(x)$的图象与$x$轴相邻的两个交点.若$\triangle ABC$周长的最小值为$4+2\sqrt{5}$，且将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{1}{3}$个单位后所得函数的图象恰好关于原点对称，则$\varphi$的值为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

12. 阿波罗尼斯(古希腊数学家，约公元前262～190年)的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果，他证明过这样一个命题：平面内与两个定点距离的比为常数$k(k>0,k\neq1)$的点的轨迹是圆，后人把这个圆称为阿波罗尼斯圆.已知定点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点C满足$|AC|=2|BC|$，则动点C的轨迹为一个阿波罗尼斯圆，记此圆为圆P，已知点D在圆P上(点D在第一象限)，AD交圆P于点E，连接EB并延长交圆P于点F，连接DF，当$\angle DFE=30^\circ$时，直线AD的斜率为

A. $\frac{\sqrt{39}}{13}$　　B. $\frac{\sqrt{26}}{13}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

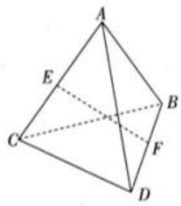
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$c=\sqrt{2}b=2$，且$A=\frac{\pi}{4}$，则$a=$_______.

14. 已知实数x,y满足$\begin{cases}x+y\leq2,\\x-y\leq2,\\-1\leq x\leq2,\end{cases}$则$2x+y$的最小值为_______.

15. 在平行四边形$ABCD$中，点M为BC边的中点，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$，则$\lambda+\mu=$_______.

16. 如图所示，在棱长为$2a$的正四面体$ABCD$中，点E,F分别为AC,BD的中点，现用一个与EF垂直，且与正四面体的四个面都相交的平面去截该正四面体，当所得截面多边形面积的最大值为4时，该四面体的外接球的体积为_______.



三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17.(本小题满分12分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$\frac{1}{2}a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

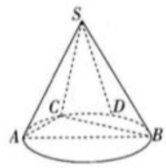
(2)求数列$\{\frac{a_n}{n}\}$的前n项和S_n.

18.(本小题满分12分)

如图所示,AB为圆锥$S-ABC$底面圆的直径,点C为底面半圆弧AB上不与A,B重合的一点,设点D为劣弧BC的中点.

(1)求证:$BC\perp SD$.

(2)设$AB=2$,且圆锥的高为3,当$\angle BAC=60^\circ$时,求二面角$A-SC-B$的余弦值.



19.(本小题满分12分)

焦虑症是一种常见的神经症,多发于中青年群体,某机构为调查焦虑症与年龄之间的关联,随机抽取10人进行焦虑值(满分100分)的测试,根据调查得到如下数据表:

人员	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
年龄 x(岁)	26	34	25	24	20	20	19	19	18	17
焦虑值 y(分)	80	89	89	78	75	71	65	62	55	50

(1)我们约定:焦虑值 y 关于年龄 x 的线性相关系数的绝对值在0.75(含0.75)以上为线性相关性较强,否则视为线性相关性较弱,如果没有较强的线性相关性,那么不考虑用线性回归进行拟合. 试根据调查数据判断能否用线性回归对焦虑值 y 与年龄 x 的相关关系进行拟合. 若能,请求出焦虑值 y 关于年龄 x 的线性回归方程(回归方程的斜率和截距的估计值均精确到0.01);若不能,请说明理由.

(2)现从所调查的10人中随机抽取5人,记年龄在20岁(含20岁)以上的人数为 ξ,求 ξ 的数学期望.

参考数据:

$\bar{x}=22.2$,$\bar{y}=71.4$,$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}\approx 15.48$,$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2-10\bar{y}^2}\approx 40.08$,$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}=525.2$.

对于一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$,其回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

线性相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}}$.

20.(本小题满分12分)

已知点P在椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上,点$F_1$,$F_2$分别为椭圆$C$的左、右焦点.设$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$的最大值和最小值分别为4和$2\sqrt{3}$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)过点F_2的直线l交椭圆C于M,N两点,求$\triangle MF_1N$内切圆面积的最大值.

21.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=me^x$.

(1)若关于x的不等式$x^2f(x)\leqslant(x-1)e^{2x}+e^x$在$[0,+\infty)$上恒成立,求实数$m$的取值范围;

(2)若$m>0$,且曲线$y=f(x)$与抛物线$x^2=y$有两条公切线,求正数m的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](本小题满分10分)

已知圆$C_1:x^2+y^2=4$,若C_1上所有的点的横坐标变为原来的3倍,纵坐标变为原来的$\sqrt{5}$倍,得到曲线C_2,以直角坐标系的原点为极点,x轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线C_2的极坐标方程;

(2)设M,N为曲线C_2上的两点,且$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$,求$\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}$的值.

23.[选修4—5:不等式选讲](本小题满分10分)

已知函数$f(x)=|x-1|+|x+3|$.

(1)解不等式$f(x)\geqslant 3x$的解集;

(2)设$f(x)$的最小值为m,且$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=m(a>0,b>0)$,求$\frac{a^2+b^2}{b+4a}$的最小值.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试
数学模拟测试参考答案

1. D　本题考查复数. $z=\frac{1+i}{i}=\frac{i(1+i)}{i^2}=1-i$,所以复数 z 的虚部为 -1.

2. B　本题考查交集. $A=\{x|-1\leqslant x<3\}$,$B=\{x|2<x<e+2\}$,所以 $A\cap B=\{x|2<x<3\}$.

3. B　本题考查充要条件. 由 $m/\!/\beta$ 且 $n/\!/\beta$,可得 $\alpha/\!/\beta$ 或 α 与 β 相交,但由 $\alpha/\!/\beta$,可得 $m/\!/\beta$ 且 $n/\!/\beta$,所以"$m/\!/\beta$ 且 $n/\!/\beta$"是"$\alpha/\!/\beta$"的必要不充分条件.

4. A　本题考查弧度数. 设扇形的弧长为 l,半径为 r,由题意得 $\frac{l}{2r+l}=\frac{\sqrt5-1}{2}$,变形可得 $\frac{l}{r}=\frac{2(\sqrt5-1)}{3-\sqrt5}=\sqrt5+1$,即此时折扇所在扇形的圆心角的弧度数为 $\sqrt5+1$.

5. B　本题考查函数的最值. $\because f'(x)=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'=(x-1)e^x$,
$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=-e$.

6. C　本题考查古典概型. 由题意可知所求概率 $P=\frac{C_5^1}{5^3}=\frac{1}{25}$.

7. C　本题考查程序框图. $i=1,a=5,a-2[\frac{a}{5}]=5-2[1]=3$;$i=2,a=8,a-2[\frac{a}{5}]=8-2[1.6]=6$;$i=3,a=11,a-2[\frac{a}{5}]=11-2[2.1]=7>6$,即输出的 $a=11$.

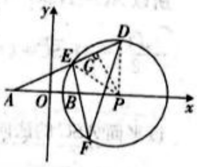
8. D　本题考查函数性质. A、B项不是奇函数,C项是减函数,只有D项符合条件.

9. B　本题考查双曲线的离心率. 抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程为 $x=-2$,将 $x=-2$ 分别代入双曲线的两条渐近线方程,得准线与两条渐近线交点的纵坐标分别为 $\frac{2b}{a}$,$\frac{-2b}{a}$,由题意可得 $\frac12\times\frac{4b}{a}\times2=3$,化简可得 $\frac{b}{a}=\frac34$,所以 $\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{9}{16}$,即得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{25}{16}$,所以双曲线的离心率为 $e=\frac54$.

10. A　本题考查对数的运算. 设经过 x 小时后须开始再次补充这种药物,则 $2000(1-25\%)^x\leqslant1200$,化简可得 $(\frac34)^x\leqslant\frac35$,所以 $x\geqslant\log_{\frac34}\frac35=\frac{\lg\frac35}{\lg\frac34}=\frac{\lg3-\lg5}{\lg3-\lg4}=\frac{\lg3+\lg2-1}{\lg3-2\lg2}\approx\frac{0.48+0.30-1}{0.48-2\times0.30}\approx1.8$,
所以经过 1.8 小时后须再次向病人体内补充这种药物,故 A 项正确.

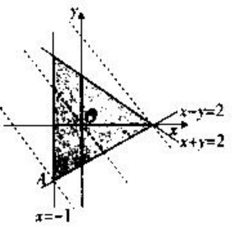
11. D　本题考查三角函数的图象与性质. 由题意得,$2\sqrt{1^2+(\frac{\pi}{2\omega})^2}+\frac{\pi}{\omega}=4+2\sqrt5$,解得 $\omega=\frac{\pi}{4}$,所以 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x+\varphi)$,所以 $f(x-\frac13)=\sin[\frac{\pi}{4}(x-\frac13)+\varphi]=\sin(\frac{\pi}{4}x+\varphi-\frac{\pi}{12})$,因为 $y=f(x-\frac13)$ 的图象关于原点对称,所以 $\varphi-\frac{\pi}{12}=k\pi(k\in Z)$,即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in Z)$,因为 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{12}$.

12. A　本题考查直线与圆. 如图所示,设动点 $C(x,y)$,则 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,化简可得 $x^2+y^2-\frac{20}{3}x+4=0$,化为标准方程可得圆 $P:(x-\frac{10}{3})^2+y^2=\frac{64}{9}$. 由正弦定理可得 $\frac{DE}{\sin30^\circ}=\frac{16}{3}$,解得 $DE=\frac83$,则△DPE 为等边三角形,过圆心 P 作 $PG\perp DE$ 于点 G,则 $\sin\angle PAG=\frac{PG}{PA}=\frac{\frac{4\sqrt3}{3}}{\frac{16}{3}}=\frac{\sqrt3}{4}$,所以 $\cos\angle PAG=\sqrt{1-(\frac{\sqrt3}{4})^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$,所以 $k_{AD}=\tan\angle PAG=\frac{\frac{\sqrt3}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{4}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$,故答案选 A.



13. $\sqrt2$　本题考查解三角形. 由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,可得 $a=\sqrt2$.

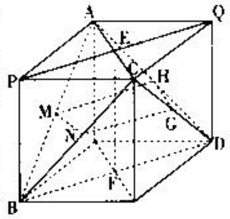
14. -5　本题考查线性规划. 作出约束条件所表示的可行域如图所示，令 $z=2x+y$，则 $y=-2x+z$，当目标直线过点 A 时，z 取得最小值，则有 $\begin{cases}x-y=2,\\x=-1,\end{cases}$



即点 $A(-1,-3)$，所以 $z_{min}=2\times(-1)-3=-5$.

15. $\frac{5}{3}$　本题考查向量基本定理. $\overrightarrow{AC}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})+\mu(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+(\frac{\lambda}{2}+\mu)\overrightarrow{AD}$，又因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $\begin{cases}\lambda-\mu=1,\\\frac{\lambda}{2}+\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{4}{3},\\\mu=\frac{1}{3},\end{cases}$ 所以 $\lambda+\mu=\frac{5}{3}$.

16. $8\sqrt{6}\pi$　本题考查三棱锥外接球的体积. 将该四面体补成正方体，如图，设 $MNGH$ 为与 EF 垂直且和正四面体各个面都相交的截面多边形（四边形），因为 $EF\perp BD$，$EF\perp$ 平面 $MNGH$，所以 $BD//$ 平面 $MNGH$，所以 $MH//BD//NG$，由 $PQ//$ 平面 $MNGH$，同理可得 $MN//AC//HG$，所以截面四边形 $MNGH$ 为平行四边形. 因为该四面体为正四面体，所以 $MH=AM$，$MN=BM$，所以 $MN+MH=2a$. 由 $MH//BD$，$MN//AC$，可得 $MH\perp MN$，所以四边形 $MNGH$ 为矩形，所以 $S_{四边形MNGH}=MH\cdot MN\leqslant(\frac{MH+MN}{2})^2=a^2=4$（当且仅当 $MH=MN$ 时取等号），所以 $a=2$，所以四面体的外接球的体积为 $V=\frac{4\pi}{3}\times(\frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}}{2})^3=8\sqrt{6}\pi$.



17. 解：本题考查数列求和.

(1) 由 $\frac{1}{2}a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)}{n}$，所以 $\frac{a_2}{a_1}=2\times\frac{2}{1}$，$\frac{a_3}{a_2}=2\times\frac{3}{2}$，$\frac{a_4}{a_3}=2\times\frac{4}{3}$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2\times\frac{n}{n-1}(n\geqslant2)$，以上各式左右两边分别相乘可得 $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}\times(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1})$，即 $\frac{a_n}{a_1}=2^{n-1}\cdot n$，所以 $a_n=n\cdot2^{n-1}(n\geqslant2)$，

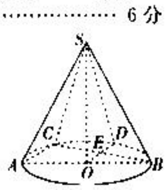
公式对 $n=1$ 也适合，所以 $a_n=n\cdot2^{n-1}$. ………………………………………… 6 分

(2) 因为 $\frac{a_n}{n}=2^{n-1}$，所以 $S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$. ………………………………… 12 分

18. 解：本题考查二面角.

(1) 证明：取 AB 的中点 O，连接 SO，OD，则 $SO\perp$ 平面 ABC，且 OD 垂直平分 BC，所以 $SO\perp BC$，$BC\perp OD$，又因为 $SO\cap OD=O$，$SO\subset$ 平面 SOD，$OD\subset$ 平面 SOD，所以 $BC\perp$ 平面 SOD，因为 $SD\subset$ 平面 SOD，所以 $BC\perp SD$. ………………………………………… 6 分

(2) 因为 AB 为底面圆的直径，所以 $AC\perp BC$，以 C 点为原点，建立如图所示的空间直角坐标系. 因为 $AB=2$，$SO=3$，$\angle BAC=60^\circ$，



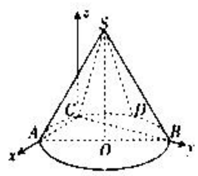
所以 $AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，则 $C(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$S(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3)$，$\overrightarrow{SA}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-3)$，$\overrightarrow{SC}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-3)$，$\overrightarrow{SB}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-3)$.

设平面 ASC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\\overrightarrow{SC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ 即得 $\begin{cases}\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1-3z_1=0,\\-\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1-3z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，

则平面 ASC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,-2\sqrt{3},1)$；

设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{SB}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\\overrightarrow{SC}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 即得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2-3z_2=0,\\-\frac{1}{2}x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2-3z_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，



则平面 SBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-6,0,1)$.

则 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{1}{\sqrt{13}\times\sqrt{37}}=\frac{\sqrt{481}}{481}$，

即二面角 $A-SC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{481}}{481}$. ………………………………………… 12分

19. 解：本题考查线性回归分析和数学期望.

(1)由题意，可借助计算相关系数判断焦虑值 y 与年龄 x 的线性相关程度，从而判断是否能用线性回归方程进行拟合.

相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\bar{y}^2}}=\frac{525.2}{15.48\times40.08}\approx84.65\%>0.75$，由题意，$y$ 与 x 有较强的线性相关性，故可用线性回归对它们的相关关系进行拟合. ………………………………… 2分

设回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}=\frac{525.2}{15.48^2}\approx2.19$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx22.78$.

所以焦虑值 y 关于年龄 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=2.19x+22.78$. ………………………… 5分

(2)由题意可知 ξ 的所有可能取值为 1，2，3，4，5.

$P(\xi=1)=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{6}{252}=\frac{1}{42}$，$P(\xi=2)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{60}{252}=\frac{5}{21}$；

$P(\xi=3)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{120}{252}=\frac{10}{21}$，$P(\xi=4)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{60}{252}=\frac{5}{21}$；

$P(\xi=5)=\frac{C_6^5C_4^0}{C_{10}^5}=\frac{6}{252}=\frac{1}{42}$.

故 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

所以 $E(\xi)=1\times\frac{1}{42}+2\times\frac{5}{21}+3\times\frac{10}{21}+4\times\frac{5}{21}+5\times\frac{1}{42}=3$. ………………………… 12分

20. 解：本题考查直线与椭圆.

(1)设坐标原点为 O，则 $\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$，所以 $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=2|\overrightarrow{PO}|$，由题意，$|\overrightarrow{PO}|_{max}=2$，$|\overrightarrow{PO}|_{min}=\sqrt{3}$，所以 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4分

(2)因为三角形内切圆的半径 $r=\frac{2S_{\triangle MF_1N}}{|MF_1|+|NF_1|+|MN|}=\frac{2S_{\triangle MF_1N}}{4a}=\frac{S_{\triangle MF_1N}}{4}$，故 $\triangle MF_1N$ 内切圆面积的最大值为 $\pi[\frac{(S_{\triangle MF_1N})_{max}}{4}]^2=\frac{\pi[(S_{\triangle MF_1N})_{max}]^2}{16}$.

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，联立 l 的方程与椭圆 C 的方程可得 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

消去 x 可得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，

所以 $S_{\triangle MF_1N}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=12\sqrt{\frac{m^2+1}{(3m^2+4)^2}}=12\sqrt{\frac{1}{9m^2+15+\frac{1}{m^2+1}}}$

$=12\sqrt{\frac{1}{9(m^2+1)+\frac{1}{m^2+1}+6}}$，

令 $m^2+1=t(t\geq1)$，则 $f(t)=9t+\frac{1}{t}(t\geq1)$，$f'(t)=9-\frac{1}{t^2}>0$，所以 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(t)\geq f(1)=10$，所以 $S_{\triangle MF_1N}\leq12\times\sqrt{\frac{1}{16}}=3$，

即$\triangle MF_1N$内切圆面积的最大值为$\frac{9\pi}{16}$. ………………………………………… 12分

21. 解：本题考查导数的综合.

(1)$x^2f(x)\leqslant(x-1)e^{2x}+e^x$在$[0,+\infty)$上恒成立，等价于$(x-1)e^x-mx^2+1\geqslant0$在$[0,+\infty)$上恒成立. 令$g(x)=(x-1)e^x-mx^2+1$，则$g'(x)=e^x+(x-1)e^x-2mx=x(e^x-2m)$.

当$m\leqslant\frac{1}{2}$时，若$x\geqslant0$，则$g'(x)\geqslant0$，$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以当$x\geqslant0$时，$g(x)\geqslant g(0)=0$，即$m\leqslant\frac{1}{2}$符合题意；

当$m>\frac{1}{2}$时，$2m>1$，当$0<x<\ln(2m)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$[0,\ln(2m)]$上单调递减，所以$g(\ln(2m))<g(0)=0$，所以$m>\frac{1}{2}$不符合题意.

综上，实数m的取值范围是$(-\infty,\frac{1}{2}]$. ………………………………………… 6分

(2)设切点坐标为(x_0,me^{x_0})，则切线l的方程为$y-me^{x_0}=me^{x_0}(x-x_0)$，由$\begin{cases}x^2=y,\\y-me^{x_0}=me^{x_0}(x-x_0),\end{cases}$得$x^2-me^{x_0}x+me^{x_0}(x_0-1)=0$，令$\Delta=(-me^{x_0})^2-4me^{x_0}(x_0-1)=0$，

可得$m=\frac{4(x_0-1)}{e^{x_0}}(x_0>1)$.

令$h(x)=\frac{4(x-1)}{e^x}(x>1)$，则$h'(x)=\frac{4e^x-4e^x(x-1)}{(e^x)^2}=\frac{4(2-x)}{e^x}$，

可得$h(x)$在$(1,2]$上单调递增，在$[2,+\infty)$上单调递减，所以$h(x)_{\max}=h(2)=\frac{4}{e^2}$.

当$x>1$时，$h(x)>0$，由题意，直线$y=m$与函数$h(x)$的图象有两个不同的交点，所以正数m的取值范围是$(0,\frac{4}{e^2})$. ………………………………………… 12分

22. 解：本题考查极坐标与参数方程.

(1)设圆C_1上任意一点$P(x,y)$经变换后对应的点为$P'(x',y')$，则$\begin{cases}x'=3x,\\y'=\sqrt{5}y,\end{cases}$即$\begin{cases}x=\frac{x'}{3}\\y=\frac{y'}{\sqrt{5}}\end{cases}$，代入圆$C_1$的方程，得$(\frac{x'}{3})^2+(\frac{y'}{\sqrt{5}})^2=4$，化简可得曲线$C_2$的直角坐标方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. 将$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$代入，可得曲线$C_2$的极坐标方程为$5\rho^2\cos^2\theta+9\rho^2\sin^2\theta=180$，即$\rho^2=\frac{180}{5+4\sin^2\theta}$. ………………………………………… 5分

(2)设$M(\rho_1,\alpha)$，因为$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，所以$N(\rho_2,\alpha\pm\frac{\pi}{2})$，由(1)可得$\frac{1}{|OM|^2}=\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{5+4\sin^2\alpha}{180}$，

$\frac{1}{|ON|^2}=\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{5+4\sin^2(\alpha\pm\frac{\pi}{2})}{180}$，所以$\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}=\frac{5+4\sin^2\alpha}{180}+\frac{5+4\sin^2(\alpha\pm\frac{\pi}{2})}{180}=\frac{14}{180}=\frac{7}{90}$. ………………………………………… 10分

23. 解：本题考查绝对值不等式和基本不等式.

(1)当$x\leqslant-3$时，不等式$f(x)\geqslant3x$等价于$1-x-x-3\geqslant3x$，解得$x\leqslant-\frac{2}{5}$，此时原不等式的解集为$\{x|x\leqslant-3\}$；

当$-3<x<1$时，不等式$f(x)\geqslant3x$等价于$1-x+x+3\geqslant3x$，解得$x\leqslant\frac{4}{3}$，此时原不等式的解集为$\{x|-3<x<1\}$；

当$x\geqslant1$时，不等式$f(x)\geqslant3x$等价于$x-1+x+3\geqslant3x$，解得$x\leqslant2$，此时原不等式的解集为$\{x|1\leqslant x\leqslant2\}$.

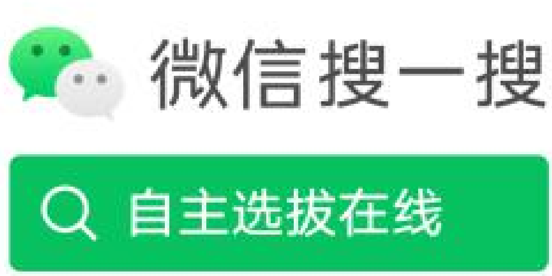
综上，不等式$f(x)\geqslant3x$的解集为$\{x|x\leqslant2\}$. ………………………………………… 5分

(2)因为$|x-1|+|x+3|\geqslant|(x-1)-(x+3)|=4$(当且仅当$(x-1)(x+3)\leqslant0$，即$-3\leqslant x\leqslant1$时取等号)，所以$m=4$，所以$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=4$，即$b+4a=4ab$，所以$\frac{a^2+b^2}{b+4a}=\frac{a^2+b^2}{4ab}=\frac{1}{4}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\geqslant\frac{1}{4}\times2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{1}{2}$(当且仅当$a=b=\frac{5}{4}$时取等号)，故$\frac{a^2+b^2}{b+4a}$的最小值为$\frac{1}{2}$. ………………………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》