2024 届高三年级 10 月份大联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. B 【解析】由题设知，原命题的否定为：$\exists x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant x-x^2$. 故选 B.

2. D 【解析】$M=\{y\mid y=\ln(4-x^2)\}=(-\infty,\ln 4]$，所以 $M\cap N=[-2,\ln 4]$. 故选 D.

3. D 【解析】因为 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，所以 $2x-1\in(0,1]$，所以 $2x+\frac{1}{2x-1}=\left[(2x-1)+\frac{1}{2x-1}\right]+1\geqslant 2\sqrt{(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}}+1=3$，当且仅当 $2x-1=\frac{1}{2x-1}$，即 $x=1$ 时取等号. 故选 D.

4. D 【解析】对于选项 A、B，函数为偶函数；对于选项 C，函数为奇函数，且 $f'(x)=3x^2-1$，则当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$时，$f(x)$单调递减；对于选项 D，函数为奇函数，且 $f'(x)=3x^2+1$，则当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)=x^3+x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增. 故选 D.

5. C 【解析】因为 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{2\,023}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{2\,023}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,024}-\frac{1}{2\,025}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,025}=\frac{2\,023}{4\,050}$. 故选 C.

6. A 【解析】由题意知 $C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}=0.4C_0$，所以 $\frac{t}{5\,730}\lg\frac{1}{2}=\lg\frac{4}{10}$，所以 $t=5\,730\times\frac{1-2\lg 2}{\lg 2}\approx 5\,730\times\frac{1-2\times 0.301\,0}{0.301\,0}\approx 7\,577$，所以可推断该生物死亡的时间约为公元前 7 577−2 023=5 554 年. 故选 A.

7. D 【解析】设 $f(x)=-x^2$，$g(x)=x^2-4x$ 分别存在最大值 $M=0$ 和最小值 $m=-4$，$f(x)-g(x)=-2x^2+4x$ 的最大值为 $2\neq M-m$，所以充分性不成立；反之，若 $f(x)=-2x^2$，$g(x)=-x^2-2x$，$f(x)-g(x)=-x^2+2x$ 取得最大值为 1，但 $g(x)=-x^2-2x$ 不存在最小值，所以必要性不成立. 故选 D.

8. B 【解析】由已知，$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in[0,2\pi)$时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $f(x)$在区间$[0,2\pi)$上恰有 9 个极值点，所以$\frac{17\pi}{2}<2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{19\pi}{2}$，所以$\frac{13}{3}<\omega\leqslant\frac{29}{6}$. 故选 B.

二、选择题

9. AC 【解析】由 $x>y$ 可知 $x^2-1>y^2-1$，再根据对数函数的单调性可知 A 选项正确，同理可得 C 选项正确，由 $x>y$ 可得 $-x<-y$，由指数函数的单调性可得 D 选项错误，对于 B 选项：由于正弦函数在定义域内并不是单调的，所以 $\sin x$ 与 $\sin y$ 的大小关系无法确定，故 B 选项错误. 故选 AC.

10. ACD 【解析】A 选项，由题意，$f(-x)=(-x)^3e^{|-x|}=-x^3e^{|x|}=-f(x)$，故 $f(x)$是奇函数，故 A 正确；当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，故此时 $f(x)$单调递增，又 $f(x)$是奇函数，所以当 $x<0$ 时，$f(x)$单调递增，$f(x)$在 $x=0$ 处图象不间断，因此 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f(0)=0$，故 $f(x)$有 1 个零点，无极值点，故 B 错误，C 正确；D 选项，由题意设 $f(x)$在$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率 $k=f'(x_0)=4e$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-1$，因此 $f(x)$在这两点处的切

线方程分别为 $y=4ex-3e$,$y=4ex+3e$,故 D 正确.故选 ACD.

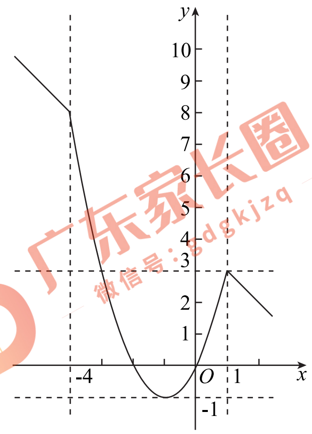
11. BD 【解析】A:若 $f(0)=\sqrt{3}$,则 $2\cos\varphi=\sqrt{3}$,所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为 $\varphi\in[0,\pi]$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 A 错误;B:若函数 $y=f(x)$ 为偶函数,则 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$,所以 $\cos^2\varphi=1$,所以 B 正确;C:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,则 $b-a\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,但不一定小于 $\frac{\pi}{2\omega}$,所以 C 错误;D:若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,则 $f(x)=-2\sin\omega x$,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$\omega x\in\left[-\frac{\pi}{3}\omega,\frac{\pi}{4}\omega\right]$,因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调,所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{4}\omega\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得,$\omega\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$,所以 D 正确.故选 BD.

12. ACD 【解析】$a-b=\ln b-b+1$,构造函数 $f(x)=\ln x-x+1$,$f'(x)=\frac{1}{x}-1$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递增,在 $(1,+\infty)$ 单调递减,所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$,$a\leqslant b$,$c-b=e^b-b-1$,构造函数 $g(x)=e^x-x-1$,$g'(x)=e^x-1$,因为 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 单调递增,所以 $g(x)>g(0)=0$,所以 $c>b$.故选 ACD.

三、填空题

13. $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(a_n=\cos\frac{n}{n+1}\right)$ 【解析】因为 $0<a_{n+1}<a_n<1(\forall n\in\mathbf{N}^*)$,所以满足上述条件数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式可以为 $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 或 $a_n=\cos\frac{n}{n+1}$.(答案符合条件即可)

14. $(-1,3)$ 【解析】如图,作出 $y=f(x)$ 的图象,与直线 $y=m$,若 $g(x)$ 有且只有 3 个不同的零点,则 m 的取值范围是 $(-1,3)$.故答案为 $(-1,3)$.



15. $\left[\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi},+\infty\right)$ 【解析】设矩形长为 a,宽为 b,设圆的半径为 r,则 $\pi r^2=ab$,所以 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{2(a+b)}{2\pi r}=\frac{a+b}{\pi r}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{\pi r}=\frac{2\sqrt{\pi r^2}}{\pi r}=\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$,当且仅当 $a=b=r\sqrt{\pi}$ 时,等号成立.故答案为 $\left[\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi},+\infty\right)$.

16. $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$ 【解析】因为 $A_1=(-1,1)$,依题意得,$A_2=(-1,0,0,1)$,$A_3=(-1,0,-1,1,-1,1,0,1)$,显然,A_1 中有 2 项,其中 1 项为 -1,1 项为 1,A_2 中有 4 项,其中 1 项为 -1,1 项为 1,2 项为 0,A_3 中有 8 项,其中 3 项为 -1,3 项为 1,2 项为 0,由此可得 A_n 总共有 2^n 项,其中 1 和 -1 的项数相同,设 A_n 中有 c_n 项为 0,所以 $2b_n+c_n=2^n$,从而 $2b_{n-1}+c_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant2)$ ①,因为 $f(A)$ 表示把 A 中每个 -1 都变为 $-1,0$,每个 0 都变为 $-1,1$,每个 1 都变为 0,1 所得到的新的有序实数组,则 $b_n=b_{n-1}+c_{n-1}(n\geqslant2)$ ②,①+②得,$b_n+b_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant2)$ ③,所以 $b_{n+1}+b_n=2^n$ ④,④−③得,$b_{n+1}-b_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant2)$,所以当 n 为奇数时,$b_n=(b_n-b_{n-2})+(b_{n-2}-b_{n-4})+\cdots+(b_3-b_1)+b_1=2^{n-2}+2^{n-4}+\cdots+2^1+1=\frac{2-2^n}{1-4}+1=\frac{2^n+1}{3}$,当 n 为偶数时,因为 $b_n+b_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant2)$,所以 $b_n=2^{n-1}-b_{n-1}=$

$2^{n-1}-\dfrac{2^{n-1}+1}{3}=\dfrac{2^n-1}{3}$，所以 $b_n=\begin{cases}\dfrac{2^n+1}{3}, n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{2^n-1}{3}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 当 n 为奇数时，$b_n+b_{n+1}=\dfrac{2^n+1}{3}+\dfrac{2^{n+1}-1}{3}=2^n$，所以 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $\dfrac{2-2^{2n-1}\times 4}{1-4}=\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}$. 故答案为 $\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}$.

四、解答题

17. **解：**(1) $A=\{x|-1<x<\sqrt{6}\}$，（1 分）

$\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,-1]\cup[\sqrt{6},+\infty)$；（2 分）

$A\cap B=\{x|-1<x\leqslant\sqrt{5}\}$，（3 分）

$A\cup B=\{x|-1\leqslant x<\sqrt{6}\}$.（4 分）

(2) 当 $a=-1$ 时，$A=\varnothing$，显然 $A\subseteq B$ 成立；（5 分）

当 $a<-1$ 时，$A=(a,-1)$，显然 $A\subseteq B$ 不成立；（6 分）

当 $a>-1$ 时，$A=(-1,a)$，（7 分）

因为 $A\subseteq B$，$B=[-1,\sqrt{5})$，所以 $a\leqslant\sqrt{5}$，即此时 $-1<a\leqslant\sqrt{5}$，（9 分）

综上，$-1\leqslant a\leqslant\sqrt{5}$.（10 分）

18. **解：**(1) 设 $t=\log_2 x$，则 $t-\dfrac{3}{t}+2=0$，即 $t^2+2t-3=0$，得 $t_1=-3$，$t_2=1$，

所以方程的根为：$x_1=\dfrac{1}{8}$，$x_2=2$.（5 分）

(2) 设 $t=\log_2 x$，$g(t)=t+\dfrac{a}{t}+3$，$t\in[1,4]$，

由题意可得 $t+\dfrac{a}{t}+3\geqslant 9$，即 $a\geqslant -t^2+6t$ 在 $t\in[1,4]$ 时恒成立，

而 $y=-t^2+6t$ 在 $[1,3)$ 上单调递增，在 $(3,4]$ 上单调递减，

所以当 $t=3$ 时，$y=-t^2+6t$ 取最大值为 9，所以 $a\in[9,+\infty)$.（12 分）

19. **解：**(1) 因为 $\dfrac{S_n}{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，所以 $S_n=\dfrac{(n+1)a_n}{2}$，$S_{n-1}=\dfrac{na_{n-1}}{2}$，（1 分）

两个等式相减得，$S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+1)a_n}{2}-\dfrac{na_{n-1}}{2}$ $(n\geqslant 2)$，（2 分）

所以 $a_n=\dfrac{(n+1)a_n}{2}-\dfrac{na_{n-1}}{2}$ $(n\geqslant 2)$，所以 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，

因为 $a_1=1$，所以 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}=1$ $(n\geqslant 2)$，（4 分）

所以 $a_n=na_1=n$ $(n\geqslant 2)$，经验证，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 成立，所以 $a_n=n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.（5 分）

(2) 因为 $b_n=3^n a_n=3^n\cdot n$，所以 $T_n=3^1\times 1+3^2\times 2+3^3\times 3+\cdots+3^n\cdot n$ ①，（6 分）

所以 $3T_n=3^2\times 1+3^3\times 2+3^4\times 3+\cdots+3^{n+1}\cdot n$ ②，（7 分）

①－②，得 $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-3^{n+1}\cdot n$，（8 分）

即 $-2T_n=\dfrac{3-3^{n+1}}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$，

所以 $T_n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$，（9 分）

因为 $T_n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$ 是关于 n 的增函数，且 $T_3=102$，

所以 $T_n>102$，所以 $n\geqslant 4$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.（12 分）

20. **解：**(1) 因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\dfrac{\alpha}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，（1 分）

所以 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{3}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=2\sqrt{2}$，（3 分）

因为 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=-\sqrt{2}$，

所以 $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\frac{\alpha}{2}\right]=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{1+(-\sqrt{2}\times2\sqrt{2})}=\sqrt{2}$.

（6 分）

（2）因为 $\sqrt{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{2\sqrt{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+2\sqrt{2}\tan\frac{\beta}{2}}$，所以 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

因为 $\sin^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}=1$，$\beta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$， （8 分）

又 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{9}=\frac{11\sqrt{6}}{27}$. （12 分）

21. **解：**（1）在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得，$\frac{\sin\alpha}{BD}=\frac{\sin B}{AD}$，

则 $\sin\alpha=\frac{BD\sin B}{d}$，

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得，$\frac{\sin\beta}{CD}=\frac{\sin C}{d}$，

则 $\sin\beta=\frac{CD\sin C}{d}$， （2 分）

因为 $2ac\sin\alpha+2ab\sin\beta=3bc$，所以 $\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\beta}{c}=\frac{3}{2a}$， （3 分）

所以 $\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\beta}{c}=\frac{BD\sin B}{bd}+\frac{CD\sin C}{cd}=\frac{BD\sin A}{ad}+\frac{CD\sin A}{ad}=\frac{\frac{1}{2}(BD+CD)}{ad}=\frac{\frac{1}{2}a}{ad}=\frac{1}{2d}$， （5 分）

所以 $\frac{1}{2d}=\frac{3}{2a}$，所以 $a=3d$. （6 分）

（2）由 $CD=2BD$，得 $CD=\frac{2a}{3}$，$BD=\frac{a}{3}$，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得，$\cos\angle ADB=\frac{BD^2+d^2-AB^2}{2BD\cdot d}=\frac{2a^2-9c^2}{2a^2}$， （7 分）

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得，$\cos\angle ADC=\frac{CD^2+d^2-AC^2}{2CD\cdot d}=\frac{5a^2-9b^2}{4a^2}$， （8 分）

$\because\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$，$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，即 $\frac{2a^2-9c^2}{2a^2}=-\frac{5a^2-9b^2}{4a^2}$，

整理可得，$a^2-b^2=2c^2$， （9 分）

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $-\frac{c^2}{2bc}=-\frac{c}{2b}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore c=\sqrt{3}b$，$\therefore a^2-b^2=6b^2$，即 $a=\sqrt{7}b$， （11 分）

所以 $\cos\angle ADC=\frac{5a^2-9b^2}{4a^2}=\frac{35b^2-9b^2}{28b^2}=\frac{13}{14}$.

（12 分）

22. **解：**（1）$f'(x)=\ln x+1$，其中 $x\in(0,+\infty)$，

令 $m(x)=\ln x^2-2x+2$，可得 $m'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$， （1 分）

当 $x\in(0,1)$ 时，可得 $m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，可得 $m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，

所以 $m(x)\leqslant m(1)=0$，所以 $m(\sqrt{x})=\ln x-2\sqrt{x}+2\leqslant0$， （3 分）

即 $\ln x+1\leqslant2\sqrt{x}-1$，即 $f'(x)\leqslant2\sqrt{x}-1$. （4 分）

（2）$g(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x$，其中 $x\in(0,+\infty)$，

可得，$g'(x)=\ln(x+1)+1-ax-1=\ln(x+1)-ax$，

令 $\varphi(x)=g'(x)=\ln(x+1)-ax$，可得 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a$， （5 分）

①当 $a\leqslant 0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)=g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)>g'(0)=0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不存在最大值； （6 分）

②当 $a\geqslant 1$ 时，$\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a<1-a\leqslant 0$，

可得 $\varphi(x)=g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g'(x)<g'(0)=0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不存在最大值；（7 分）

③当 $0<a<1$ 时，由 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a=0$，可得 $x=\frac{1}{a}-1>0$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)=g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$ 上单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)=g'(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 上单调递减. （8 分）

因为 $g'(0)=0$，所以 $g'\left(\frac{1}{a}-1\right)>0$，又当 $x\to+\infty$ 时，$g'(x)=\ln(x+1)-ax\to-\infty$，

所以由零点的存在性定理，存在 $x_0\in\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$，使得 $\varphi(x_0)=0$， （10 分）

所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减，

此时 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值 $g(x_0)$，符合题意，

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(0,1)$. （12 分）