

中学生标准学术能力诊断性测试 2019 年 9 月测试

文科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。



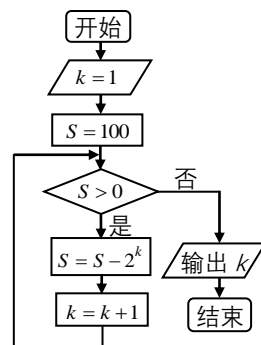
扫码查成绩

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{y | y = |x+1|, x \in A\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{-1, 0\}$       B.  $\{0, 1\}$       C.  $\{-1, 1\}$       D.  $\{-1, 0, 1\}$
- 已知复数  $z = \frac{1+2i}{3-i}$  (其中  $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$   
A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{26}}{10}$       D.  $\frac{\sqrt{74}}{10}$
- 若向量  $a, b$  满足  $|a|=1, |b|=2$ , 且  $|3a-b|=\sqrt{19}$ , 则向量  $a, b$  的夹角为  
A.  $30^\circ$       B.  $60^\circ$       C.  $120^\circ$       D.  $150^\circ$
- 为得到函数  $y = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$  的图象, 只需将函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象  
A. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个长度单位      B. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个长度单位  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个长度单位      D. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个长度单位

5. 阅读算法流程图, 运行相应的程序, 则输出的  $k$  是

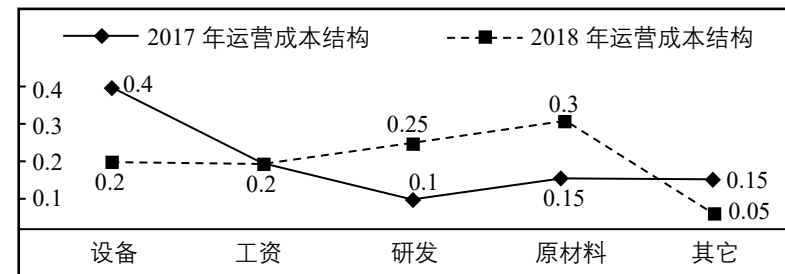
- A. 5  
B. 6  
C. 7  
D. 8



(第 5 题图)

6. 某企业引进现代化管理体制, 生产效益明显提高. 2018 年全年总收入与 2017 年全年总收入相比增长了一倍, 实现翻番. 同时该企业的各项运营成本也随着收入的变化发生了相应变化. 下图给

出了该企业这两年不同运营成本占全年总收入的比例, 下列说法正确的是



- A. 该企业 2018 年设备支出金额是 2017 年设备支出金额的一半  
B. 该企业 2018 年支付工资金额与 2017 年支付工资金额相当  
C. 该企业 2018 年用于研发的费用是 2017 年用于研发的费用五倍  
D. 该企业 2018 年原材料的费用是 2017 年原材料的费用的两倍
7. 将直线  $3x + y + a = 0$  沿  $x$  轴向右平移 1 个单位, 所得直线与圆  $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$  相切, 则实数  $a$  的值为  
A.  $-7$  或  $13$       B.  $7$  或  $-13$       C.  $1$  或  $-19$       D.  $-1$  或  $19$
8. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 2 \\ 3x-y-6 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $\frac{x+y-3}{x-4}$  的最小值为  
A.  $-4$       B.  $-3$       C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $2$
9. 函数  $f(x) = \frac{3x}{2e^{|x|}}$  的大致图象是  
A.      B.      C.      D.
10. 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 直线  $l: 2x + y - 12 = 0$  与抛物线交于  $M, N$  两点, 且以线段  $MN$  为直径的圆过点  $F$ , 则  $p =$   
A. 1      B. 2      C. 4      D. 6
11. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2(a_n - 2^n)$ , 若不等式  $2n^2 - n - 3 \leq ma_n$  对任意  $n \in \mathbf{N}^*$  恒成立, 则实数  $m$  的最小值是  
A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{3}{8}$       D.  $\frac{3}{4}$
12. 若函数  $f(x) = ax^3 - 5ax^2 - |x|$  有四个不同的零点, 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $(-\frac{25}{4}, 0)$     B.  $(-1, -\frac{4}{25})$     C.  $(-\infty, -\frac{25}{4})$     D.  $(-\infty, -\frac{4}{25})$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在区间  $[1, 16]$  上随机选取一个实数  $x$ ，则事件“ $\log_3 x - 2 \geq 0$ ”发生的概率为\_\_\_\_\_。

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-1, & x > 1 \\ 2-e^x, & x \leq 1 \end{cases}$ ，则使  $1 < f(x) < 2$  成立的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

15. 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点  $F(c, 0)$ ，右顶点  $A$  到一条渐近线的距离为  $\frac{1}{2}c$ ，则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_。

16. 长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，若  $AD=2, CD_1=4$ ，则当  $AD_1+AC$  最大时，三棱锥  $D_1-ACD$  的体积为\_\_\_\_\_。

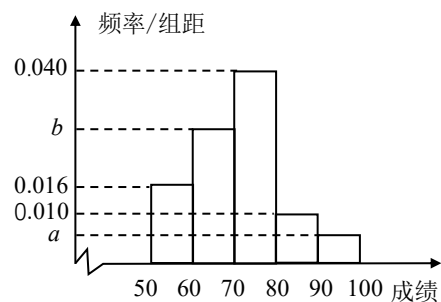
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：60 分。

17. (12 分) 在  $\triangle ABC$  中， $a, b, c$  分别为角  $A, B, C$  的对边，且  $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sqrt{5}c-a}{b}, C = \frac{\pi}{4}$ 。

(1) 求  $\cos A$  的值；    (2) 若  $b = \sqrt{5}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ 。

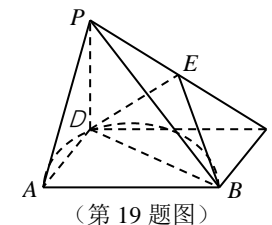
18. (12 分) 某高中学校决定开展“数学知识竞赛”活动，各班级都进行了选拔，高三一班全体同学都参加了考试，将他们的分数进行统计，并作出如右图的频率分布直方图和分数的茎叶图(其中，茎叶图中仅列出了得分在  $[50, 60), [90, 100]$  的数据)。



(1) 求高三一班学生的总数和频率分布直方图中  $a, b$  的值；  
(2) 在高三一班学生中，从竞赛成绩在 80 分以上(含 80 分)的学生中随机抽取 2 名学生参加学校“数学知识竞赛”，求所抽取的 2 名学生中至少有一人得分在  $[90, 100]$  内的概率。

19. (12 分) 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面为平行四边形， $AB$  为半圆的直径， $D$  在半圆上， $PD \perp$  平面  $ABCD$ ，且  $PD=AD=1, AB=2$ ， $E$  是  $PC$  的中点。

(1) 求证： $PA \parallel$  平面  $BDE$ ；    (2) 求点  $C$  到平面  $BDE$  的距离。



(第 19 题图)

20. (12 分) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点  $F_1$ ，直线  $l: 2x - 3y - 6 = 0$  与  $y$  轴交于点  $P$ ，且与椭圆交于  $A, B$  两点， $A$  为椭圆的右顶点， $B$  在  $x$  轴上的射影恰为  $F_1$ 。

(1) 求椭圆  $E$  的方程；  
(2)  $M$  为椭圆  $E$  在第一象限部分上一点，直线  $MP$  与椭圆交于另一点  $N$ ，若  $S_{\triangle PMA} : S_{\triangle PBN} = \lambda$ ，求  $\lambda$  的取值范围。

21. (12 分) 设  $A, B$  为函数  $y = f(x)$  图象上相异两点，且  $A, B$  的横坐标之积为常数  $k (k \neq 0)$ ，若  $y = f(x)$  在  $A, B$  两点处的切线存在交点，则称这个交点为函数  $f(x)$  的“ $S(k)$  点”。

(1) 求函数  $f(x) = x^3$  的“ $S(2)$  点”的纵坐标的取值范围；  
(2) 判断函数  $f(x) = \ln x$  的“ $S(1)$  点”在哪个象限，并说明理由。

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22, 23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。作答时请写清题号。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程选讲] (10 分)

在平面直角坐标系中，曲线  $C_1: x^2 + y^2 - 4x = 0$ ，曲线  $C_2: \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数)，以坐标原点  $O$  为极点， $x$  轴非负半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 求曲线  $C_1, C_2$  的极坐标方程；  
(2) 在极坐标系中，射线  $\theta = \frac{\pi}{3}$  与  $C_1, C_2$  分别交于  $A, B$  两点(异于极点  $O$ )，定点  $M(5, 0)$ ，求  $\triangle MAB$  的面积。

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |3x - 1| - 2|x + 1|$ 。

(1) 解不等式  $f(x) < 4$ ；  
(2) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) + 5|x + 1| < -a^2 + 5a$  的解集不是空集，求  $a$  的取值范围。