中学生标准学术能力诊断性测试
文科数学科目参考答案

一．选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	A	C	D	B	B	C	D	A	D

二．填空题（每小题 5 分）

13. 27　　14. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　15.（1，-2）　　16. $\left[\dfrac{\sqrt{6}a^2}{2},\sqrt{2}a^2\right]$

三．解答题

17.【解题思路】解:(1) $\because a_{n+1}=S_n+1$, 当 $n=1$ 时, $a_2=a_1+1$, ---------1 分

又 $\because a_1+a_2=3, \therefore a_1=1, a_2=2$ ------------------2 分

当 n>1 时,, $a_n=S_{n-1}+1, a_{n+1}-a_n=a_n, \therefore a_{n+1}=2a_n, \therefore \{a_n\}$ 为等比数列，--4 分

且公比 q=2, ------------------------------5 分

$a_n=2^{n-1}$； ----------------6 分

(2) 由（1）知：$b_n=a_n(\log_2 a_n+1)=n\cdot 2^{n-1}$ ---------7 分

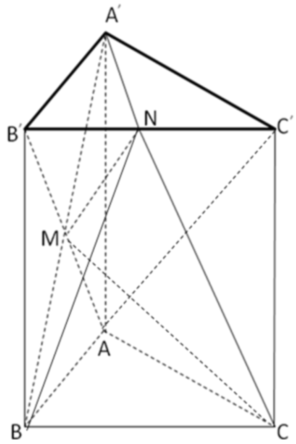
$\therefore T_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$ ----------8 分

$\therefore 2T_n=\quad 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$ ----------9 分

$\therefore -T_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\dfrac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^n$ ------11 分

$\therefore T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. ------------12 分

18.【解题思路】⑴ 证明：连接 AC'，



$\because M, N$ 分别是 $B'A$ 与 $B'C$ 的中点

$\therefore MN//AC'$, 又 $\because MN\not\subset$ 平面 $ACC'A'$, $AC'\subset$ 平面 $ACC'A'$ 所以 $MN//$ 平面 $ACC'A'$； -----------6 分

（2）解：$\because A'B'=A'C'$, N 为 $B'C'$ 的中点, $\therefore A'N\perp B'C'$，

------7 分

$\because BB' \perp$ 平面$A'B'C'$，$\therefore BB' \perp A'N \therefore A'N \perp$ 平面$BCC'B'$， ------9 分

$\therefore V_{A'-MNC} = V_{B-MNC} = V_{M-BCN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCN} \cdot \frac{1}{2} A'N = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. --------12 分

19. **【解题思路】**（1） 解：$K^2 = \frac{100(28\times20-30\times22)^2}{50\times50\times58\times42} = \frac{100}{609} < 0.708$ ------3 分

所以没有 60%的把握认为“甲组”用户与“性别”有关 ； ---------4 分

（2）所抽取 5 人中“甲组”和“乙组”的人数分别为 3 人 2 人；-------7 分

（3）设：甲组的三人为 A,B,C,乙组的二人为 a,b,则从 5 人中选取 2 人的基本事件有：（A,B）（A,C）（A,a）（A,b）（B,C）（B,a）（B,b）（C,a）（C,b）（a,b)共 10 种 ---9 分

其中都在甲组或都在乙组的有（A,B）（A,C）（B,C）（a,b），共 4 种---------10 分

所以“所选取 2 人中都在甲组或都在乙组”的概率 P=$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. -------------12 分

20. **【解题思路】**(1)解：设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ---------------------1 分

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

，$\therefore a = 2,\ b = 1,$ 所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ --------4 分

（2）解：设$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

由题得：$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y = kx + 2 \end{cases}$ 消元得：$(1+4k^2)x^2 + 16kx + 12 = 0$ ----5 分

$\therefore \Delta = 256k^2 - 48(1+4k^2) = 64k^2 - 48 > 0$

$\therefore k^2 > \frac{3}{4}$ --6 分

且$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{16k}{1+4k^2} \\ y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 4 = \frac{4}{1+4k^2} \end{cases}$ --7 分

$\therefore \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (-\frac{16k}{1+4k^2}, \frac{4}{1+4k^2})$ -----------------------------------8 分

又$\because A_2(2,0), B(0,1), \therefore \overrightarrow{A_2B} = (-2,1)$又$\because$向量$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$与$A_2B$共线，

$-\frac{16k}{1+4k^2}\times 1=-2\times\frac{4}{1+4k^2}, \therefore k=\frac{1}{2}$,与$k^2>\frac{3}{4}$矛盾 --------------------------------11 分

所以，不存在符合条件的直线l. ----------------------12 分

21.【解题思路】(1)解：因为$f(1)=2$,所以$-a+3=2$,所以$a=1$，------1 分

$\therefore f(x)=2\ln x-x^2+3x$ --2 分

$\therefore f'(x)=\frac{2}{x}-2x+3=-\frac{(2x+1)(x-2)}{x}$ ------------------------------3 分

由$f'(x)>0$得,$0<x<2$，有$f'(x)<0$得，$x>2$,

$\therefore f(x)$在（0,2）为增函数，在（2,+∞）为减函数

$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=2\ln 2+2$ ----------------6 分

(2)证明：当$a=-1$时，$f(x)=2\ln x+x^2+3x$, ----------------------7 分

$\because f(x_1)+f(x_2)=2\ln x_1+x_1^2+3x_1+2\ln x_2+x_2^2+3x_2=0$

$\therefore (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)=2(x_1x_2-\ln x_1x_2)$ ----------------------------8 分

令$h(t)=t-\ln t$，$\therefore h'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$,

由$h'(x)>0$得，$t>1$，由$h'(x)<0$得,$0<t<1$

$\therefore h(x)$在（0,1）为减函数，在（1,+∞）为增函数

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=1$ --------------------------10 分

$\therefore (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)\geqslant 2 \therefore (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)-2\geqslant 0$, -------------------11 分

$\therefore x_1+x_2\geqslant\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. ---12 分

22.解：（1）设 P 的极坐标为$(\rho,\theta)(\rho>0)$，M 的极坐标为$(\rho_1,\theta)(\rho_1>0)$------1 分

由题设知|OP|=ρ,$|OM|=\rho_1=\frac{6}{\cos\theta}$, ----------------2 分

由|OM||OP|=36 得 C_2 的极坐标方程$\rho=6\cos\theta(\rho>0)$ ---------------3 分

因此 C_2 的直角坐标方程为$(x-3)^2+y^2=9(x\neq 0)$. ----------------5 分

（2）设点 B 的极坐标为$(\rho_B,\alpha)(\rho_B>0)$. 由题设知|OA|=4，$\rho_B=6\cos\alpha$，----6 分

于是△OAB 面积 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot\rho_B\sin\angle AOB=12\cos\alpha\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|$ --------------7 分

$$=12\left|\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\alpha\right|=6\left|\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$=6\left|\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\leqslant 6+3\sqrt{3}$$ ---------------------------9 分

所以当 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$ 时，S 取得最大值 $6+3\sqrt{3}$.

所以△OAB 面积的最大值为 $6+3\sqrt{3}$. ------------------------------ 10 分

23.【解题思路】（1）解：$f(x)=|x+1|-|x-2|\geqslant 2$

当 $x<-1$ 时，$f(x)=-x-1+x-2=-3\geqslant 2$ 不成立 ---------------2 分

当 $-1\leq x\leq 2$ 时，$f(x)=x+1+x-2=2x-1\geqslant 2,\therefore x\geqslant\frac{3}{2}\ \therefore\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ -------3 分

当 $x>2$ 时，$f(x)=x+1-x+2=3\geqslant 2$ 恒成立，$\therefore x>2$ -----------------4 分

综上所述：$f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$； ------------------------------5 分

（2）解：$\because |f(x)|\leqslant|x+1-x+2|=3,\therefore -3\leqslant f(x)\leqslant 3$ -------------------7 分

$\therefore f(x)_{\min}=-3$, -----------------------------------8 分

$\because f(x)\geqslant a^2+4a$ 恒成立，$\therefore a^2+4a\leqslant -3$ ----------------------------9 分

所以 a 的范围是 $[-3,-1]$ --------------------------------------10 分