

数学试题(文科)

(测试时间:120 分钟 卷面总分:150 分)

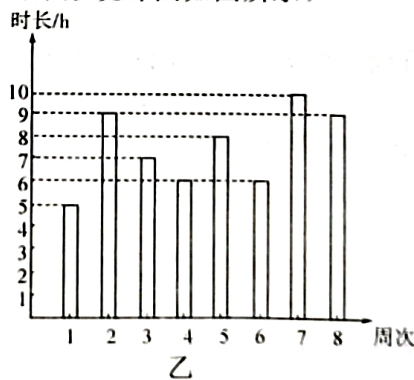
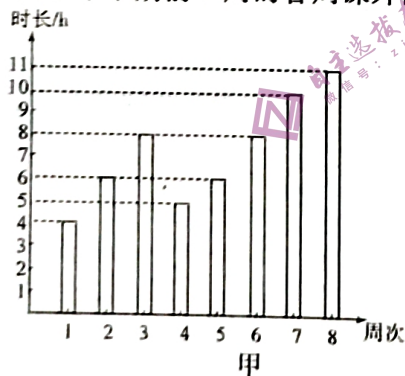
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{x \mid |x-2| < 3\}$, 则 $A \cup B$
 - A. $\{1, 3\}$
 - B. $\{1, 3, 5\}$
 - C. $\{1, 3, 5, 7\}$
 - D. $\{x \mid -1 < x \leq 5\} \cup \{7\}$
2. 设 $z = \frac{-2+i}{i}$, 则 $|\bar{z}| =$
 - A. $\sqrt{2}$
 - B. $\sqrt{5}$
 - C. 2
 - D. 5
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{DB}$, E 为 CD 的中点, $\overrightarrow{AE} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$
 - A. 2
 - B. 1
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{1}{3}$

4. 甲、乙两位同学本学期前 8 周的各周课外阅读时长的条形统计图如图所示,



则下列结论正确的是

- A. 甲同学周课外阅读时长的样本众数为 8
 - B. 甲同学周课外阅读时长的样本中位数为 5.5
 - C. 乙同学周课外阅读时长的样本平均数是 7.5
 - D. 乙同学周课外阅读时长大于 8 的概率的估计值大于 0.4
5. 某城市有一个面积为 1 km^2 的矩形广场,该广场为黄金矩形(它的宽与长的比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$),现在中央设计一个矩形草坪,四周是等宽的步行道,能否设计恰当的步行道的宽度使矩形草坪

为黄金矩形? 则下列选项正确的是

A. 步行道的宽度 3 m

B. 步行道的宽度 5 m

C. 步行道的宽度 $2(\sqrt{5}+1)$ m

D. 草坪不可能为黄金矩形

6. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0, \\ x-y+1 \geq 0, \\ 2x-y-2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z=(x-4)^2+(y-1)^2$ 的取值范围是

A. $[\sqrt{5}, 4]$

B. $[\sqrt{10}, 4]$

C. $[5, 16]$

D. $[10, 25]$

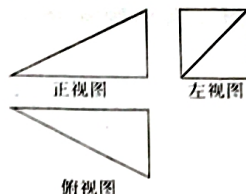
7. 一个几何体的三视图如图所示, 其中正视图和俯视图是直角边长分别为 2 和 4 的两个全等的直角三角形. 则这个几何体的外接球的体积为

A. $4\sqrt{3}\pi$

B. $8\sqrt{6}\pi$

C. $\frac{16}{3}\sqrt{2}\pi$

D. $32\sqrt{3}\pi$



8. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2b\sin B = (2c+a)\sin C + (2a+c)\sin A$. 若 $\sin A + \sin C = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是

A. 等腰直角三角形

B. 等腰锐角三角形

C. 等腰钝角三角形

D. 不等腰钝角三角形

9. 已知 PC 是圆锥 PO 的一条母线, AB 是底面直径, $\triangle PAB$ 为正三角形, $\angle ABC = 30^\circ$, 则 PC 与 AB 所成角的余弦值为

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{8}$

10. 已知点 $A(-1, 2), B(0, a)$, 若直线 AB 关于 $y=a$ 的对称直线 l 与圆 $C: (x+3)^2 + y^2 = 18$ 相切, 则 $a =$

A. 3

B. $3\sqrt{2}$

C. 9

D. 3 或 9

11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$ 且都为连续函数, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(1-x), g(x)$ 均为奇函数, $g(1) = 2$, 则 $f(2023) + g(2023) =$

A. -2

B. 0

C. 2

D. 2023

12. 椭圆 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 C 的短轴为直径的圆记为 O , 过 F_1 作圆 O 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1 N F_2 = -\frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{\sqrt{65}}{9}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 中国共产党第二十次全国代表大会于 2022 年 10 月 16 日在北京召开. 某媒体从甲、乙等 6 名记者中选两人参加宣传报道, 则甲、乙至少有一人被入选的概率为 _____.

14. 记函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T , 且 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 当 ω 取最小值时, $f\left(\frac{T}{2}\right) =$ _____.

15. 过抛物线 $C: y = 2x^2$ 准线上的点 P 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|$ 图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的两条切线互相垂直, 若 $f(a) < f(x_1 + x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_2 = 1$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 其中 $b_1 = a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_6$.

(1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_3 \neq a_3$, 求 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

为了调查抖音平台某直播间带货服务的满意程度, 现随机调查了年龄在 20 岁至 70 岁的 100 人, 他们年龄的频数分布和“满意”的人数如下表 (其中 $a = 5b$):

年龄/岁	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70]
频数	15	25	30	20	10
满意	13	a	27	16	b

(1) 从 $[60,70]$ 段中随机抽取一人“满意”的概率为 0.4, 若以频率估计概率, 以上表的样本数据来估计总体, 求从全国玩抖音的市民 (假设年龄均在 20 岁至 70 岁) 中随机抽取一人是“满意”的概率.

(2) 根据 (1) 的数据, 填写下面的 2×2 列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为年龄低于 50 岁的人和年龄不低于 50 岁的人对服务态度有差异;

	年龄低于 50 岁的人数	年龄不低于 50 岁的人数	合计
满意			
不满意			
合计			

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

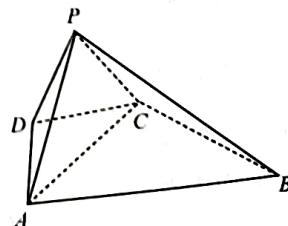
$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = CD = BC = PA = PC = \frac{1}{2}AB$, $BC \perp PA$.

(1) 证明: 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC ;

(2) 若 $PB = 2\sqrt{2}$, 求点 D 到平面 PBC 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 3a \ln x - \frac{1}{2}x^2 - (a-3)x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $g(x) = f(x) - 3 \ln x + \frac{1}{2}x^2 - \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的渐近线相同, 点 $P(2\sqrt{2}, 1)$ 在 C 上, F_2 为 C 的右焦点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 M 是直线 $l: x=t$ 上的任意一点, 是否存在这样的直线 l , 使得过点 M 的直线与 C 相切于点 N , 且以 MN 为直径的圆过点 F_2 ? 若存在, 求出直线 l 的方程, 若不存在, 说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

数学上有很多美丽的曲线令人赏心悦目, 例如, 极坐标方程 $\rho = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$ 表示的曲线为心形线, 它对称优美, 形状接近心目中的爱心图形. 以极点 O 为原点, 极轴为 x 轴的正

半轴建立直角坐标系, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$$

(1) 求直线 l 的极坐标方程和心形线的直角坐标方程;

(2) 已知点 P 的极坐标为 $(2, 0)$, 若 P 为心形线上的点, 直线 l 与心形线交于 A, B 两点 (异于 O 点), 求 $\triangle ABP$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知 a, b 均为正数, 且 $a^2 + 2b^2 = 6$, 证明:

(1) $a + 2b \leq 3\sqrt{2}$;

(2) $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{2}\sqrt{2}$.