高三年级学习质量评估考试

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	B	C	C	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABC	ACD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．80；　　14．$-4\sqrt{3}$；　　15．$\frac{1}{2}$；　　16．1，$\frac{25\pi}{3}$．

四、解答题：共 72 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.【解析】

【1】若选择① $b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$，

由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……2 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；……3 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$，……5 分

因为 $A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{4}$，

所以 $C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$，……6 分

所以 $\sin C=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，……8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$．……10 分

【2】若选择② $a\cos B=b\sin A$，

则 $\sin A\cos B=\sin B\sin A$，

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B=\cos B$，..........2 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；..........3 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$，..........5 分

因为 $A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{4}$，

所以 $C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$，..........6 分

所以 $\sin C=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，..........8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$．..........10 分

【3】若选择③ $\sin B+\cos B=\sqrt{2}$，

则 $\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，所以 $\sin(B+\frac{\pi}{4})=1$，..........2 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，

所以 $B+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；..........3 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$，..........5 分

因为 $A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{4}$，

所以 $C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$，..........6 分

所以 $\sin C=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，..........8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$．..........10 分

18.【解析】

（1）连接 BD 交 AQ 于点 M，连接 PM，

因为 $\triangle BMQ \backsim \triangle DMA$， $BQ=\frac{1}{2}AD$，

所以 $BM=\frac{1}{2}DM$，……………………………………………………2 分

又 $EP=\frac{1}{2}DP$，所以 $PM \parallel BE$，………………………………………3 分

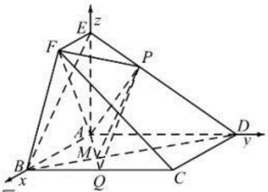
又 $PM \subset$ 平面 APQ， $BE \not\subset$ 平面 APQ，

所以 $BE \parallel$ 平面 APQ；……………………………………………………5 分

（2）【解法一】

以 A 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AD}$， $\overrightarrow{AE}$ 为 x 轴， y 轴， z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，……………………………………………………6 分

则 $A(0,0,0)$, $C(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$, $D(0,2\sqrt{2},0)$, $E(0,0,2)$, $F(\sqrt{2},0,2)$，



设 $P(x,y,z)$，因为 $DP=2PE$，

所以 $\overrightarrow{DP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$，则 $(x,y-2\sqrt{2},z)=\frac{2}{3}(0,-2\sqrt{2},2)$，

则 $P(0,\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{4}{3})$，所以 $\overrightarrow{AP}=(0,\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{4}{3})$，

设平面 AFP 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，又因为 $\overrightarrow{AF}=(\sqrt{2},0,2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1+2z_1=0\\ \frac{2\sqrt{2}}{3}y_1+\frac{4}{3}z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=\sqrt{2}$，则 $y_1=\sqrt{2}, z_1=-1$，

故 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$；……………………………………………………8 分

又 平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$，……………………………………9 分

所以 $\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，……………………………………11 分

由图可知所求二面角为锐角，

所以 二面角 $P-AF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. ……………………………………12 分

【解法二】

在 $\triangle ADE$ 中，作 $PG\perp AE$ 于 G，

作 $GH\perp AF$ 于 H，连接 PH.

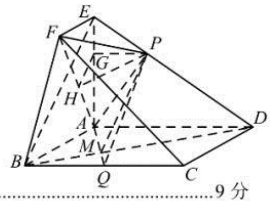
因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE\perp AD$，又 $AB\perp AD$， $AB\cap AE=A$，

所以 $AD\perp$平面$ABFE$，

又$PG\perp AE$，所以$PG\,/\!/\,AD$，所以 $PG\perp$平面$ABFE$， ....7 分

$AF\subset$平面$ABFE$，



所以 $PG\perp AF$，又 $PG\cap GH=G$，

所以 $AF\perp$平面PGH，

所以 $PH\perp AF$，

故$\angle PHG$即为所求二面角的平面角，记该角为θ ....9 分

因为 $PG=\frac{1}{3}AD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

又$\triangle AHG\backsim\triangle AEF$，所以 $\frac{GH}{FE}=\frac{AG}{AF}=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$，所以$GH=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，

在直角$\triangle PGH$中，$PH=\sqrt{PG^2+GH^2}=\frac{2\sqrt{30}}{9}$，

所以 $\cos\theta=\frac{GH}{PH}=\frac{\sqrt{10}}{5}$， ....11 分

所以 二面角$P-AF-E$的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$． ....12 分

19. 【解析】

（1）因为$S_n=\log_2(F_n-1)-1$，$F_n=2^{2^n}+1$，

所以 $S_n=\log_2(2^{2^n}+1-1)-1=2^n-1$； ....2 分

当$n=1$时，$a_1=S_1=1$， ....3 分

当$n\geqslant 2$时， $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，

$a_1=1$适合上式，

故 $a_n=2^{n-1}$； ....5 分

（2）因为 $a_n=2^{n-1}$，所以 $a_{n+1}=2^n$，

所以 $b_n=(n+1)\log_2 a_{n+1}=(n+1)\log_2 2^n=n(n+1)$， ....6 分

故 $\frac{2}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， ....7 分

所以 $T_n=2(1-\frac{1}{2})+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1})=2-\frac{2}{n+1}$；……………10 分

因为 $\frac{2}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}>0$，所以 $T_{n+1}-T_n>0$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，即 $T_{n+1}>T_n$，

所以 $T_n\geqslant T_1=1$，又因为 $\frac{2}{n+1}>0$，

所以 $T_n=2-\frac{2}{n+1}<2$，

综上 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant T_n<2$．……………12 分

20.【解析】

（1）由题意可知 从一年内发生的交通事故中随机抽出一起事故，则该起事故是恰好是超速驾驶的概率为0.2，设“恰好有一起事故属于超速驾驶”为事件 A，

则 $P(A)=C_3^1\times\frac{1}{5}\times(1-\frac{1}{5})^2$……………2 分

$=\frac{48}{125}$……………3 分

（2）由题意，设 $d_2=k\cdot v^2$，因为 当行车速度为 100 km/h 时，制动距离为 65 m，

所以 $k=0.0065$，即 $d_2=0.0065v^2$，……………5 分

（i）因为 d_1 与 v 之间具有线性相关关系，故设 $\hat{d}_1=\hat{b}v+\hat{a}$，

因为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}v_i(d_1)_i-n\overline{v}\,\overline{d_1}}{\sum_{i=1}^{10}v_i^2-n\overline{v}^2}=\frac{22187.3-10\times100.4\times21}{106054-10\times100.4^2}=\frac{1103.3}{5252.4}\approx0.21$，……………7 分

故 $\hat{d}_1=0.21v+\hat{a}$，把 $(100.4,21)$ 代入上式，解得 $\hat{a}=-0.084$，

则 d_1 与 v 之间的回归方程为：$\hat{d}_1=0.21v-0.084$；……………8 分

设 停车距离为 d，则 $d=d_1+d_2$，

则 $d=0.0065v^2+0.21v-0.084$，

当 $v=110$ km/h 时，$d=101.666$，

即 车速为 110 km/h 时的停车距离为 101.666 m；……………10 分

（ii）易知 当车速为 100 km/h 时，停车距离为 85.916 m，该距离小于 100 m，

又因为 当车速为110 km/h 时的停车距离为101.666 m，该距离大于 100m，

由以上两个数据可知，当车速超过 100 km/h 时，必须与同车道前车保持 100 米以上的距离才能保证行驶安全. ……………………………………………………………………12 分

21.【解析】

（1）由题意可知 $\begin{cases} a-c=1 \\ a=2c \end{cases}$，解得 $a=2, c=1$，所以$b=\sqrt{3}$，

故 椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$； ……………………………………………………3 分

（2）（i）因为 椭圆长轴端点坐标为$(-2,0)$和$(2,0)$，

所以 椭圆的"外切圆"E的方程为$x^2+y^2=4$； ………………………………………5 分

（ii）【解法一】

假设存在满足条件的定点Q，

由题意可知定点Q必在x轴上，设$Q(m,0)$，$P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

由（i）可知，圆E的圆心为坐标原点O，半径为2，

设以PQ为直径的圆的圆心为G，半径为r，则G为线段PQ的中点，$r=\frac{|PQ|}{2}$，

即 $G(\frac{x_0+m}{2},\frac{y_0}{2})$，$r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+y_0^2}$

因为圆E与圆G相切，则 $|OG|=2-r$， ……………………………………………………6 分

所以 $\sqrt{(\frac{x_0+m}{2})^2+\frac{y_0^2}{4}}=2-\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+y_0^2}$，其中$y_0^2=3-\frac{3}{4}x_0^2$， ……………8 分

两边平方并整理：$4-mx_0=2\sqrt{(x_0-m)^2+y_0^2}$，

化简得：$(m^2-1)(x_0^2-4)=0$， ……………………………………………………………10 分

上式对任意$x_0\in[-2,2]$恒成立，

故 $m^2-1=0$，解得：$m=\pm1$，

所以 当定点Q恰好为椭圆C的焦点时，符合题意. ………………………………………12 分

【解法二】

假设存在满足条件的定点Q，

由题意可知定点Q必在x轴上，设$Q(m,0)$，$P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

由（i）可知，圆E的圆心为坐标原点O，半径为2，

设以 PQ 为直径的圆的圆心为 G，半径为 r，则 G 为线段 PQ 的中点，$r=\frac{|PQ|}{2}$，

即 $G(\frac{x_0+m}{2},\frac{y_0}{2})$，$r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+y_0^2}$

因为圆 E 与圆 G 相切，则 $|OG|=2-r$，..6 分

所以 $\sqrt{(\frac{x_0+m}{2})^2+\frac{y_0^2}{4}}=2-\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+y_0^2}$，..8 分

则 $\sqrt{(\frac{x_0+m}{2})^2+\frac{y_0^2}{4}}+\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+y_0^2}=2$，

则 $\sqrt{(x_0+m)^2+y_0^2}+\sqrt{(x_0-m)^2+y_0^2}=4$，

设 $Q'(-m,0)$，则 $|PQ'|+|PQ|=4$ ....10 分

又因为，点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，设 F_1,F_2 分别为椭圆的左右焦点，

则 $|PF_1|+|PF_2|=4$，

故 Q,Q' 分别与 F_1,F_2 重合，

所以 当定点 Q 恰好为椭圆 C 的焦点时，符合题意．..12 分

【解法三】

假设存在满足条件的定点 Q，

由题意可知定点 Q 必在 x 轴上，

由（i）可知，圆 E 的圆心为坐标原点 O，半径为 2，

设以 PQ 为直径的圆的圆心为 G，半径为 r，则 G 为线段 PQ 的中点，$r=\frac{|PQ|}{2}$，

因为圆 E 与圆 G 相切，则 $|OG|=2-r$，..6 分

即 $|OG|=2-\frac{|PQ|}{2}$，

所以 $2|OG|+|PQ|=4$，..8 分

设 Q' 为 Q 关于原点的对称点，则 OG 恰好为 $\triangle QQ'P$ 的中位线，

所以 $2|OG|=|PQ'|$，

所以 $|PQ'|+|PQ|=4$，..10 分

又因为，点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，设 F_1,F_2 分别为椭圆的左右焦点，

则 $|PF_1|+|PF_2|=4$，

故 Q,Q' 分别与 F_1,F_2 重合，

7

所以 当定点Q恰好为椭圆C的焦点时，符合题意. ....12 分

【解法四】

假设存在满足条件的定点Q，设$Q(m,n)$，$P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

由（i）可知，圆E的圆心为坐标原点O，半径为2，

设以PQ为直径的圆的圆心为G，半径为r，则G为线段PQ的中点，$r=\frac{|PQ|}{2}$，

即 $G(\frac{x_0+m}{2},\frac{y_0+n}{2})$，$r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+(y_0-n)^2}$

因为圆E与圆G相切，则 $|OG|=2-r$，..6 分

所以 $\sqrt{\frac{(x_0+m)^2}{4}+\frac{(y_0+n)^2}{4}}=2-\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+(y_0-n)^2}$，..............................8 分

则 $\sqrt{\frac{(x_0+m)^2}{4}+\frac{(y_0+n)^2}{4}}+\frac{1}{2}\sqrt{(x_0-m)^2+(y_0-n)^2}=2$，

则 $\sqrt{(x_0+m)^2+(y_0+n)^2}+\sqrt{(x_0-m)^2+(y_0-n)^2}=4$，

设$Q'(-m,-n)$，则 $|PQ'|+|PQ|=4$ ....10 分

又因为，点P在椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上，设$F_1,F_2$分别为椭圆的左右焦点，

则 $|PF_1|+|PF_2|=4$，

故 Q,Q'分别与F_1,F_2重合，

所以 当定点Q恰好为椭圆C的焦点时，符合题意. ....12 分

22.【解析】

（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$， ....1 分

令$f'(x)>0$，解得：$0<x<\mathrm{e}$，

令$f'(x)<0$，解得：$x>\mathrm{e}$，

所以 当$x\in(0,\mathrm{e})$，$f(x)$为增函数，当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$f(x)$为减函数，

所以 $x=\mathrm{e}$时，$f(x)$有极大值$f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}+b=\frac{1+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，

所以 $b=1$；..3 分

（2）【解法一】

由（1）知，$f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$，

8

则 $g(x)\geqslant af(x)$，即 $\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}\geqslant\frac{a\ln x}{x}+a$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $x\mathrm{e}^x-a\geqslant a\ln x+ax$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $x\mathrm{e}^x-a\ln x-ax-a\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

设 $h(x)=x\mathrm{e}^x-a\ln x-ax-a$，则 $h(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，......................4 分

（i）若 $a<0$，当 $x\in(0,1)$ 时，

$h(x)=x\mathrm{e}^x-a\ln x-ax-a<\mathrm{e}-a\ln x-2a$，

则 $h(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{a}-2})<\mathrm{e}-a\ln\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{a}-2}-2a=0$，

不合题意；..5 分

（ii）若 $a=0$，则 $h(x)=x\mathrm{e}^x\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

符合题意；..6 分

（iii）若 $a>0$，则 $h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}-a=(x+1)(\mathrm{e}^x-\frac{a}{x})$，

设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

因为 $\varphi(a)=\mathrm{e}^a-1>0$，$\varphi(\frac{a}{a+3})=\mathrm{e}^{\frac{a}{a+3}}-a-3<0$，

所以 $\exists x_0\in(\frac{a}{a+3},a)$，使 $\varphi(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\frac{a}{x_0}=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数；

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0}-a\ln x_0-ax_0-a$，

因为 $\mathrm{e}^{x_0}-\frac{a}{x_0}=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0}=\frac{a}{x_0}$，$\ln x_0=\ln a-x_0$，

所以 $h(x_0)=x_0\frac{a}{x_0}-a(\ln a-x_0)-ax_0-a=-a\ln a$，

则 $-a\ln a\geqslant 0$，即 $\ln a\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$；...7 分

综上 $0\leqslant a\leqslant 1$．..8 分

【解法二】

9

由（1）知，$f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$，

则 $g(x)\geqslant af(x)$，即 $e^x-\frac{a}{x}\geqslant\frac{a\ln x}{x}+a$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $xe^x-a\geqslant a\ln x+ax$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $a(1+x+\ln x)\leqslant xe^x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

设 $h(x)=1+x+\ln x$，

因为 $h(x)=1+x+\ln x$ 为单调递增函数，且 $h(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}>0$，$h(\frac{1}{e^2})=\frac{1}{e^2}-1<0$，

所以 $\exists x_1\in(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$，使得 $h(x_1)=1+x_1+\ln x_1=0$，

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h(x)<0$，当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，

①当 $x=x_1$ 时，$1+x+\ln x=0$ 时，$0\leqslant xe^x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $a\in\mathbf{R}$；……………………………………………………………………4 分

当 $x\neq x_1$ 时，即 $1+x+\ln x\neq0$ 时，设 $\varphi(x)=\frac{xe^x}{1+x+\ln x}$，

则 $\varphi'(x)=\frac{(x+1)e^x(1+x+\ln x)-xe^x(1+\frac{1}{x})}{(1+x+\ln x)^2}=\frac{(x+1)e^x(1+x+\ln x)-e^x(x+1)}{(1+x+\ln x)^2}$

$$=\frac{(x+1)e^x(\ln x+x)}{(1+x+\ln x)^2},$$

设 $p(x)=\ln x+x$，

因为 $p(x)=\ln x+x$ 为单调递增函数，且 $p(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-1<0$，$p(1)=1>0$，

所以 $\exists x_2\in(\frac{1}{e},1)$，使得 $p(x_2)=\ln x_2+x_2=0$，

当 $x\in(0,x_2)$ 时，$p(x)<0$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 是减函数，

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$p(x)>0$，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 是增函数，

所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(x_2)=\frac{x_2e^{x_2}}{1+x_2+\ln x_2}=x_2e^{x_2}$，

又因为 $\ln x_2+x_2=0$，所以 $x_2e^{x_2}=e^{x_2+\ln x_2}=e^0=1$，

所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(x_2)=1$，……………………………………………………5 分

②当 $1+x+\ln x>0$ 时，$a\leqslant\frac{xe^x}{1+x+\ln x}$ 对 $\forall x\in(x_1,+\infty)$ 恒成立，

因为 $\varphi(x)$ 在 (x_1,x_2) 上是减函数，在 $(x_2,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $a\leqslant\varphi(x_2)=1$；......6 分

③当 $1+x+\ln x<0$ 时，$a\geqslant\dfrac{xe^x}{1+x+\ln x}$ 对 $\forall x\in(0,x_1)$ 恒成立，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上是减函数，

因为 $\varphi(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x}{1+x+\ln x}=$ ，

所以 $a\geqslant\varphi(0)=0$；......7 分

综上 $0\leqslant a\leqslant1$. ......8 分

【解法三】

由（1）知，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1$，

则 $g(x)\geqslant af(x)$，即 $e^x-\dfrac{a}{x}\geqslant\dfrac{a\ln x}{x}+a$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $xe^x-a\geqslant a\ln x+ax$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $xe^x-a\ln x-ax-a\geqslant0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

设 $h(x)=xe^x-a\ln x-ax-a$，则 $h(x)\geqslant0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

$h(x)=e^{\ln x}e^x-a\ln x-ax-a=e^{\ln x+x}-a(\ln x+x)-a$，

设 $\ln x+x=t$，$t\in\mathbf{R}$，

原问题转化为：$\varphi(t)=e^t-at-a\geqslant0$ 对 $\forall t\in\mathbf{R}$ 恒成立， ......4 分

（i）若 $a<0$，当 $t\in(-\infty,0)$ 时，

$\varphi(t)=e^t-at-a<1-at-a$，

则 $h(\dfrac{1}{a}-1)<1-a(\dfrac{1}{a}-1)-a=0$，

不合题意；......5 分

（ii）若 $a=0$，则 $\varphi(t)=e^t\geqslant0$ 对 $\forall t\in\mathbf{R}$ 恒成立，

符合题意；......6 分

（iii）若 $a>0$，则 $\varphi'(t)=e^t-a$，

令 $\varphi'(t)>0$，$t>\ln a$，令 $\varphi'(t)<0$，$t<\ln a$，

所以 当 $t\in(-\infty,\ln a)$ 时，$\varphi(t)$ 为减函数，

当 $t\in(\ln a,+\infty)$ 时，$\varphi(t)$ 为增函数，

所以 $\varphi(t)\geqslant\varphi(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-a=-a\ln a\geqslant 0$，

即 $\ln a\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$；..7 分

综上 $0\leqslant a\leqslant 1$．..8 分

（3）要证 $x^2f(x)>a\sin x+x^2-1$，

只需证 $x^2(\frac{\ln x}{x}+1)>a\sin x+x^2-1$，

即 $x\ln x+x^2>a\sin x+x^2-1$，即 $x\ln x+1>a\sin x$，

只需证 $\ln x+\frac{1}{x}>\frac{a\sin x}{x}$，..9 分

设 $F(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$G(x)=x-\sin x$，

因为 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)\geqslant F(1)=1$；..10 分

因为 $G'(x)=1-\cos x\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $G(x)>G(0)=0$，则 $x>\sin x$，则 $\frac{\sin x}{x}<1$，

由（2）可知，$0\leqslant a\leqslant 1$，所以 $\frac{a\sin x}{x}<1$；..11 分

所以 $F(x)>\frac{a\sin x}{x}$，

即 $\ln x+\frac{1}{x}>\frac{a\sin x}{x}$，得证．..12 分