中学生标准学术能力诊断性测试
理科数学科目参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	B	C	A	A	B	C	C	B	D	A

二、填空题（每题 5 分）

13. $\frac{1}{5}$　　14. $[-3,-\frac{4}{3}]$　　15. 4　　16. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

三、解答题

17. （12 分）

解：（1）因为$sin^2A=sin^2\frac{B+C}{2}$，所以$\cos 2A-\cos(B+C)=0$，

即$2\cos^2A+\cos A-1=0$．解得：$\cos A=\frac{1}{2}$或$\cos A=-1$；又因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$；由余弦定理得：$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A}=\sqrt{3}$．……6 分

（2）设点P到AB边的距离为z，则有：

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta PBC}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+2z)$；

注意到：$AB^2=AC^2+BC^2$，所以ΔABC是直角三角形；从而

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CA=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

所以$\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+2z)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$z=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{3}x-y)$；所以

$d=x+y+z=\frac{1}{2}[(2-\sqrt{3})x+y+\sqrt{3}]$；

又由于x,y满足条件：$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{3}x-y) \ge 0 \end{cases}$

故 d 在 P 与 C 点重合时最小, 最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ；d 在 P 与 B 点重合时最大, 最大值为 $\sqrt{3}$. ……12 分

18. （12 分）

解法一：

（Ⅰ）设 $BD \cap OC = F$，连接 EF，

E、F 分别是 PC 、 OC 的中点，则 $EF // PO$， …1 分

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF \perp$ 平面 $ABCD$，

又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AB \perp EF$； ……3 分

在 ΔABD 中，$AB^2 + BD^2 = AD^2$，$AB \perp BD$；

又 $EF \cap BD = F$，所以 $AB \perp$ 平面 BED，

又 $DE \subset$ 平面 BED，所以 $AB \perp DE$. ……6 分

（Ⅱ）在平面 $ABCD$ 内过点 A 作 $AH \perp CO$ 交 CO 的延长线于 H，连接 HE，AE，

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $POC \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $POC \cap$ 平面 $ABCD = CO$，所以 $AH \perp$ 平面 POC，

$PC \subset$ 平面 POC，所以 $AH \perp PC$；

因PO=AD, AO=DC, 可证$Rt\Delta POA \cong Rt\Delta ADC$，故 $AP=AC$

在 ΔAPC 中，$AP=AC$，E 是 PC 中点，故 $AE \perp PC$；

所以 $PC \perp$ 平面 AHE，则 $PC \perp HE$．

所以 $\angle AEH$ 是二面角 $A-PC-O$ 的平面角．　　　　……10 分

设 $PO=AD=2BC=2CD=2$，

而 $AE^2=AC^2-EC^2$，

$AE=\frac{\sqrt{14}}{2}$ $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\sin\angle AEH=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

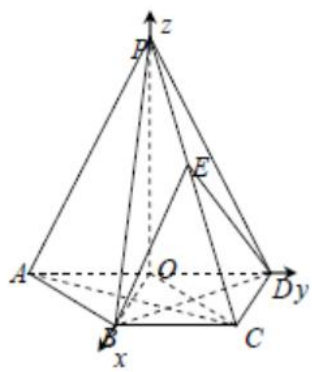
所以二面角 $A-PC-O$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$．

……12 分

解法二：

（Ⅰ）连接 OB，可证得四边形 OBCD 为菱形，

OB//DC



因为 PO⊥平面 ABCD．0B，OD⊂平面 ABCD，

所以 $PO \perp OB$，$PO \perp OD$，又因为 OB // DC，DC ⊥AD，所以 OB⊥AD　　　　……2 分

如图，以 O 为原点，以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系．

3

$A(0,-1,0)$ $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$ $D(0,1,0)$ $E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ $P(0,0,2)$ …4 分

$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$ $\overrightarrow{DE}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，所以$AB\perp DE$． ……6 分

（Ⅱ）$\overrightarrow{AC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,1,-2)$，

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0\\ x+y-2z=0\end{cases}$

令 $x=2$，得 $\boldsymbol{m}=(2,-1,\frac{1}{2})$． ……8 分

又 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PO}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，所以平面 POC 的法向量 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，

……10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{BD}|}=-\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

所以二面角 $A-PC-O$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$． ……12 分

19.（12 分） 解：

（Ⅰ）由频率分布直方图可知，在抽取的 100 人中，经济损失不超过 4000 元的有 70 人，经济损失超过 4000 元的有 30 人，则表格数据如下

	经济损失不超过 4000 元	经济损失超过 4000 元	合计
捐款超过 500 元	60	20	80
捐款不超过 500 元	10	10	20
合计	70	30	100

$K^2=\dfrac{100\times(60\times10-10\times20)^2}{80\times20\times70\times30}=4.762$. 因为 $4.762>3.841$， $p(k\geq3.841)=0.05$.

所以有95%以上的把握认为捐款数额是否多于或少于 500 元和自身经济损失是否到 4000 元有关。……………………5 分

（Ⅱ）由频率分布直方图可知抽到自身经济损失超过 4000 元居民的频率为 0.3，将频率视为概率.

由题意知 ξ 的取值可能有 $0,1,2,3$， $\xi\sim B(3,\dfrac{3}{10})$，

$P(\xi=0)=C_3^0\left(\dfrac{3}{10}\right)^0\left(\dfrac{7}{10}\right)^3=\dfrac{343}{1000}$，

$P(\xi=1)=C_3^1\left(\dfrac{3}{10}\right)^1\left(\dfrac{7}{10}\right)^2=\dfrac{441}{1000}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\left(\dfrac{3}{10}\right)^2\left(\dfrac{7}{10}\right)^1=\dfrac{189}{1000}$，

$P(\xi=3)=C_3^3\left(\dfrac{3}{10}\right)^3\left(\dfrac{7}{10}\right)^0=\dfrac{27}{1000}$， ……………9 分

从而ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

$E(\xi)=np=3\times\frac{3}{10}=0.9$,

$D(\xi)=np(1-p)=3\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=0.63$ ……………………12 分

20. （12 分）

解：（1）设$F(c,0)$，$P(t,\frac{3}{\sqrt{7}})$，则$Q(-t,\frac{3}{\sqrt{7}})$ ，……………………1 分

$\therefore \frac{t^2}{a^2}+\frac{3}{7}=1$ ，即$t^2=\frac{4}{7}a^2$，①

$\because PF\perp QF$，$\therefore \frac{\frac{3}{\sqrt{7}}}{t-c}\bullet\frac{\frac{3}{\sqrt{7}}}{-t-c}=-1$，即$c^2-t^2=-\frac{9}{7}$，②………………3 分

$\therefore$由①②得$c^2-\frac{4}{7}a^2=-\frac{9}{7}$，

又$a^2-c^2=3$，$\therefore a^2=4$，

$\therefore$椭圆M的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………5 分

（2）设 A（x_1,y_1），B（x_2,y_2），

①当直线 AB 斜率存在时，设直线AB方程为：$y=kx+m$ ，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}\\ y_1+y_2=\dfrac{6m}{3+4k^2}\end{cases}$

$\because O$为重心，$\therefore\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(\dfrac{8km}{3+4k^2},\dfrac{-6m}{3+4k^2})$，…………………7 分

$\because C$点在椭圆M上，故有$\dfrac{(\frac{8km}{3+4k^2})^2}{4}+\dfrac{(\frac{-6m}{3+4k^2})^2}{3}=1$，

可得$4m^2=4k^2+3$，…………………………8 分

而$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\dfrac{-8km}{3+4k^2})^2-4(\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2})}=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{12k^2+9-3m^2}$，

$d=\dfrac{|kx_C+m-y_C|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$ ………9 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\bullet d=\dfrac{6|m|}{3+4k^2}\sqrt{12k^2+9-3m^2}=\dfrac{6|m|}{4m^2}\sqrt{12m^2-3m^2}=\dfrac{9}{2}$，………10 分

②当直线AB斜率不存在时，$|AB|=3$，$d=3$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{9}{2}$，

$\therefore\Delta ABC$的面积为$\dfrac{9}{2}$．……………………12 分

21.（12 分）解：

解：（1）$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，

当$a=1,f'(x)=(x+1)(e^{x-1}-\dfrac{1}{x})$

令$g(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x},x\in(0,+\infty)$，$\because g'(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$，故$g(x)$在$(0,+\infty)$递增，又$g(1)=0,x\in(0,1)$时，$g(x)<g(1)=0$，

此时$f'(x)<0,f(x)$递减，$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)>g(1)=0$，此时$f'(x)>0$，$f(x)$递增，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增；　　　　　　　　　　　　……………………4 分

（2）$f'(x)=(x+1)(e^{x-1}-\frac{a}{x})$，令 $h(x)=e^{x-1}-\frac{a}{x},x\in(0,+\infty)$，

①$a\le 0$ 时，$h(x)>0$，此时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，无最小值，故 $a\le 0$ 不合题意；

②$a>0$ 时，$h'(x)=e^{x-1}+\frac{a}{x^2}$　　$h'(x)>0,h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，

取实数 b，满足 $0<b<\min\{\frac{a}{2},\frac{3}{2}\}$，则 $e^{b-1}<e^{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{e},-\frac{a}{b}<-2$，

故 $h(b)=e^{b-1}-\frac{a}{b}<\sqrt{e}-2<0$，又 $h(a+1)=e^{a}-\frac{a}{a+1}>1-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{a+1}>0$

∴存在唯一的 $x_0\in(b,a+1)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $a=x_0e^{x_0-1}$，

$x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<h(x_0)=0$，此时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>h(x_0)=0$，此时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

故 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取最小值，由题设，$x_0=m$，故 $a=me^{m-1},\ln a=\ln m+m-1$，

$f(m)=me^{m-1}(1-m-\ln m)$，由 $f(m)\ge 0$，得 $1-m-\ln m\ge 0$，

令 $\omega(m)=1-m-\ln m$，显然 $\omega(m)$ 在（0，$+\infty$）递减，

$\because \omega(1)=0,\because 1-m-\ln m\ge 0$，故 $0<m\le 1$，　　　　　　　　　……………………8 分

下面证明 $e^{m-1}\ge\ln m$，令 $n(m)=e^{m-1}-m$，则 $n'(m)=e^{m-1}-1$，

$m\in(0,1)$ 时，$n'(m)<0,n(m)$ 在 $(0,1)$ 递减，　故 $m\in(0,1]$ 时，$n(m)\ge n(1)=0$，即 $e^{m-1}\ge m$，

两边取对数，得 $\ln e^{m-1}\ge\ln m$，即 $m-1\ge\ln m,-\ln m\ge 1-m$，故

$1-m-\ln m \ge 2(1-m) \ge 0$，

$\because e^{m-1} \ge m > 0, \therefore f(m) = me^{m-1}(1-m-\ln m) \ge m^2 \cdot 2(1-m) = 2(m^2-m^3)$

综上，$f(m) \ge 2m^2(1-m)$． ……………12 分

22. （10 分）

解：（Ⅰ）半圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1(y>1)$，

它的极坐标方程是 $\rho = 2\sin\theta, \theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$． …4 分

（Ⅱ）设直线 l 的倾斜角为 α， 则直线 l 的方程为 $y = x\tan\alpha - 2$，

$D(\cos 2\alpha, 1+\sin 2\alpha), 2\alpha \in (0,\pi), |AB| = \frac{2}{\sin\alpha}$

点 D 到直线 l 的距离为 $|\sin\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\sin 2\alpha - 3\cos\alpha| = 3\cos\alpha + \sin\alpha$

由 ΔABD 的面积为 4 得 $\tan\alpha = 1$，即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$，故点 $D(0,2)$． …10 分

23.（10 分）

解：（Ⅰ）当 $m=-2$ 时，$f(x) = \begin{cases} -3x, x<-2 \\ 4-x, -2 \le x \le 1 \\ 3x, x>1 \end{cases}$

由 $f(x)$ 的单调性及 $f(-1) = f(\frac{5}{3}) = 5$，

得 $f(x) \ge 5$ 的解集为 $\{x \mid x \le -1 或 x \ge \frac{5}{3}\}$． …5 分

（Ⅱ）由 $f(x) \le m|x+5|$ 得 $m \ge \frac{|x+2|}{|x-1|+|x+5|}$，

由 $|x-1|+|x+5| \ge 2|x+2|$ 得 $\frac{|x+2|}{|x-1|+|x+5|} \le \frac{1}{2}$，得 $m \ge \frac{1}{2}$．

（当且仅当 x≥4 或 x≤−6 时等号成立）

故 m 的最小值为 $\frac{1}{2}$． …10 分