# 2022～2023 学年高三押题信息卷

## 理科数学(二)参考答案

1. A　由已知可得复数 $z$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(m+3,m-1)$，所以 $\begin{cases} m+3>0, \\ m-1<0, \end{cases}$ 解得 $-3<m<1$. 故选 A.

2. B　由题意得，$y$ 的取值一共有 3 种情况，当 $y=2$ 时，$xy$ 是偶数，不与 $y=3$，$y=5$ 有相同的元素，当 $y=3$，$x=5,15$ 时，与 $y=5$，$x=3,9$ 时有相同的元素，共 2 个，故所求元素个数为 $3\times10-2=28$. 故选 B.

3. C　由扇形统计图知，购买的 600 棵树苗中，梧桐的数量为 $600\times40\%=240$，依题意，青年教师、中年教师、老年教师报名参加植树活动的人数之比为 $5:3:2$，所以中年教师应分得梧桐的数量为 $\frac{3}{5+3+2}\times240=72$. 故选 C.

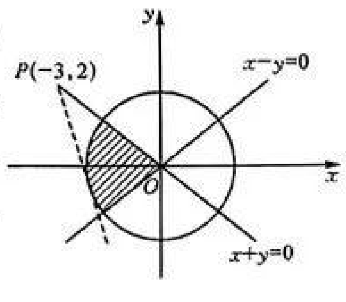
4. B　易得堑堵的体积 $V_1=\frac{V}{2}$，阳马的体积 $V_2=\frac{V}{3}$，鳖臑的体积 $V_3=\frac{1}{3}V_1=\frac{V}{6}$，所以 $V_1+V_2+V_3=V$，$V_2=2V_3$，所以 $V_2-V_3=V_3=\frac{V}{6}$，所以 ACD 正确，B 错误. 故选 B.

5. C　先将 6，1，8，9 这四个数字排列共有 $A_4^4=24$ 种排法，再将产生的 5 个空中选择 2 个空插入 3，此时排法种数为 $C_5^2=10$，结合乘法原理得到共可设置的密码数为 240. 故选 C.

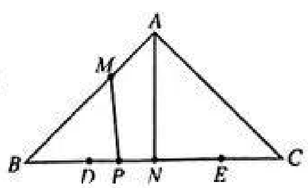
6. D　将函数 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的一半，纵坐标变为原来的 2 倍，然后向上平移 1 个单位长度得到函数 $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ 的图象，故 A 项错误；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，故 $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上先增后减，故 B 项错误；当 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$g\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)+1=1$，故 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$ 中心对称，故 C 项错误；当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ 取得最小值，且最小值为 $2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\sqrt{2}+1$；当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时，$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ 取得最大值，且最大值为 $2\times1+1=3$，故值域为 $[\sqrt{2}+1,3]$，故 D 项正确. 故选 D.

7. C　因为 $f(-x)=(-x)^2\sin(-x)+(-x)^3=-(x^2\sin x+x^3)=-f(x)$，所以该函数为奇函数，排除 B；设 $g(x)=x+\sin x$，则 $g'(x)=1+\cos x\geqslant0$，所以当 $x>0$ 时 $g(x)>g(0)=0$，又 $f(x)=x^2g(x)$，所以在 $(0,+\infty)$ 上不存在零点，所以只有 C 符合题意. 故选 C.

8. D　作出不等式组表示的平面区域，如图所示，由题意，知 $\frac{1}{4}\pi r^2=\pi$，解得 $r=2$. 因为目标函数 $z=\frac{x+y+1}{x+3}=1+\frac{y-2}{x+3}$ 表示区域内的点与点 $P(-3,2)$ 连线的斜率加上 1，由图知当区域内的点与点 $P$ 的连线与圆相切时斜率最小. 设切线方程为 $y-2=k(x+3)$，即 $kx-y+3k+2=0$，则有 $\frac{|3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\frac{12}{5}$ 或 $k=0$（舍），所以 $z_{\min}=1-\frac{12}{5}=-\frac{7}{5}$. 故选 D.




9. D　由平面向量的加法法则可得 $|\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}|_{\min}(\lambda\in\mathbf{R})$ 就是点 $A$ 到 $BC$ 的距离 $AN=2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，斜边 $BC=4$，$D$，$E$ 为斜边 $BC$ 的两个四等分点，因为 $\overrightarrow{AP}=\sin^2\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\cos^2\alpha\cdot\overrightarrow{AC}$，$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得点 $P$ 在线段 $DE$ 上运动，



当 $MP\perp BC$ 时，$|\overrightarrow{MP}|$ 取得最小值 $\frac{4}{3}$，当点 $P$ 在点 $E$ 处时，$|\overrightarrow{MP}|$ 取得最大值，根据余弦定理解得 $ME=\frac{\sqrt{41}}{3}$，所以 $|\overrightarrow{MP}|$ 的取值范围为 $\left[\frac{4}{3},\frac{\sqrt{41}}{3}\right]$. 故选 D.

10. C　根据题意知 $\frac{1-0}{2-\frac{p}{2}}=1$，所以 $p=2$，所以抛物线 $C:y^2=4x$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 $MN$ 的方程为 $x=ty+m$ $(m\neq 0)$，与抛物线方程联立得 $y^2-4ty-4m=0$，所以 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4m$，即 $x_1+x_2=4t^2+2m$，$x_1x_2=m^2$. 又因为 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，所以 $y_1y_2+x_1x_2=0$，解得 $m=0$（舍去），$m=4$，所以 $y_1+y_2=4t$，$x_1+x_2=4t^2+8$，因为 $|MN|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{(1+t^2)(16t^2+64)}=4\sqrt{(1+t^2)(t^2+4)}$，原点 $O$ 到直线 $MN$ 的距离 $d=\frac{|0-0-4|}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{4}{\sqrt{1+t^2}}$，所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times|MN|\times d=8\sqrt{t^2+4}$，所以当 $t=0$ 时，$S_{\triangle OMN}=16$ 为最小值. 故选 C.

11. A　易得 $\frac{e^x}{a}+3>\ln a+\ln(x-3)$，即 $e^{x-\ln a}+x-\ln a>\ln(x-3)+e^{\ln(x-3)}$ 恒成立，设函数 $g(x)=e^x+x$，则 $g(x-\ln a)>g(\ln(x-3))$，因为 $g'(x)=e^x+1>0$，所以 $g(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，所以 $x-\ln a>\ln(x-3)$，$\ln a<x-\ln(x-3)$，设 $h(x)=x-\ln(x-3)$，$h'(x)=1-\frac{1}{x-3}=\frac{x-4}{x-3}$，所以 $h(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $(3,4)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\min}=h(4)=4-\ln 1=4$，即 $\ln a<4$，$0<a<e^4$. 故选 A.

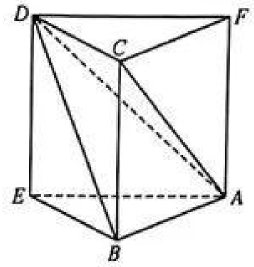
12. A　因为 $\sin^2B+2\sin^2C=4\sin^2A$，所以由正弦定理得 $AC^2+2AB^2=4BC^2$，不妨设 $BC=1$，以 $BC$ 所在直线为 $x$ 轴，以 $BC$ 的垂直平分线为 $y$ 轴建立直角坐标系，则 $B\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(\frac{1}{2},0\right)$，设 $A(x,y)$，则有 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=4$，即 $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+y^2=\frac{10}{9}$，所以 $A$ 点的轨迹是以 $\left(-\frac{1}{6},0\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{10}}{3}$ 为半径的圆，所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{\sqrt{10}}{6}$，所以 $\lambda\geqslant\frac{\sqrt{10}}{6}$. 故选 A.

13. 2　令 $g(x)=2^x-2^{-x}$，$h(x)=1+\frac{a}{2^x-1}$，则 $g(-x)=2^{-x}-2^x=-g(x)$，所以函数 $g(x)$ 为奇函数，则由 $f(x)=g(x)h(x)$ 是偶函数，知 $h(x)=1+\frac{a}{2^x-1}$ 为奇函数，所以 $h(-x)+h(x)=0$，即 $1+\frac{a}{2^{-x}-1}+1+\frac{a}{2^x-1}=0$，整理得 $2-a=0$，即 $a=2$. 来源：高三答案公众号

14. $\frac{521}{729}$　因为 $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{3}+\sin x$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{3}{2}\sin x=\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$，所以 $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1=2\times\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2-1=-\frac{25}{27}$，$\cos\left(4x+\frac{4\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-1=2\times\left(-\frac{25}{27}\right)^2-1=\frac{521}{729}$，$\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(4x+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{521}{729}$.

15. 18　由题意易得双曲线 $C$ 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，直线 $OP$ 的斜率存在且不为 0，设直线 $OP$ 的方程为 $y=kx\ (k\neq0)$，则直线 $OQ$ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$，由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2=\frac{2}{2-k^2},\\ y^2=\frac{2k^2}{2-k^2},\end{cases}$ 所以 $|OP|^2=x^2+y^2=\frac{2(k^2+1)}{2-k^2}$，同理可得 $|OQ|^2=\frac{2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{2-\frac{1}{k^2}}=\frac{2(k^2+1)}{2k^2-1}$，所以 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{2-k^2+(2k^2-1)}{2(k^2+1)}=\frac{1+k^2}{2(k^2+1)}=\frac{1}{2}$，$|OP|^2+4|OQ|^2=2(|OP|^2+4|OQ|^2)\left(\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}\right)=2\left[5+4\left(\frac{|OQ|}{|OP|}\right)^2+\left(\frac{|OP|}{|OQ|}\right)^2\right]\geqslant2(5+4)=18$，当且仅当 $|OP|=\sqrt{2}|OQ|=\sqrt{6}$ 时取等号，所以 $|OP|^2+4|OQ|^2$ 的最小值为 18.

16. $8\pi$ 或 $32\pi$　由题意可以将四面体 $ABCD$ 补成一个如图所示的直三棱柱，



因为异面直线 $AB,CD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle ABE=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，设 $\triangle ABE$ 外接圆的半径为 $r$，当 $\angle ABE=\frac{\pi}{6}$ 时，$AE^2=1+3-2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，即 $AE=1$，$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2r$，$r=1$；当 $\angle ABE=\frac{5\pi}{6}$ 时，$AE=\sqrt{7}$，则 $\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{5\pi}{6}}=2r$，$r=\sqrt{7}$，设四面体的外接球半径为 $R$，则 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2+1}$，所以该四面体外接球的半径 $R=\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$，则外接球的表面积为 $8\pi$ 或 $32\pi$. 来源：高三答案公众号

17. 解：(1)不需要聘请技术员成功的概率为 $p_0=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$， ………… 1分

需要聘请一位技术员成功的概率为

$P_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{11}{24}$， ………… 3分

设事件 $M$：小李聘请一位技术员，就能成功，

则 $P(M)=p_0+p_1=\frac{1}{4}+\frac{11}{24}=\frac{17}{24}$. ………… 4分

(2)需要聘请两位技术员成功的概率为

$P_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$，

………… 6分

设随机变量 $X$：小李聘请两位技术员情形下，参加刺绣活动，所得收益，

则 $X$ 的所有可能取值为：$70,20,-30,-230$， ………… 7分

则 $P(X=70)=p_0=\frac{1}{4}$，$P(X=20)=p_1=\frac{11}{24}$，$P(X=-30)=p_2=\frac{1}{4}$； ………… 8分

$P(X=-230)=1-p_0-p_1-p_2=\frac{1}{24}$，

所以 $E(X)=70\times\frac{1}{4}+20\times\frac{11}{24}+(-30)\times\frac{1}{4}+(-230)\times\frac{1}{24}=\frac{115}{12}$. ………… 12分

18. 解：(1)$A_n=\frac{3n^2+3n}{2}$，$\therefore n\geq2$ 时，$a_n=A_n-A_{n-1}=\frac{3n^2+3n}{2}-\frac{3(n-1)^2+3(n-1)}{2}=3n$， ………… 2分

$n=1$ 时，$a_1=3$ 也适合上式.

$\therefore a_n=3n$. ………… 3分

$\because a_{n+1}-a_n=\frac{3}{2}(b_{n+1}-b_n)$，$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{2}{3}\times3=2$，又 $b_1=2$，

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2，公差为 2 的等差数列. ………… 5分

$\therefore B_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+n$. ………… 6分

(2)对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=B_n$，$\therefore a_{n+1}-a_n=B_{n+1}-B_n=b_{n+1}$.

$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{2}{3}\times(a_{n+1}-a_n)=\frac{2}{3}b_{n+1}$, $\therefore b_{n+1}=3b_n, b_1>0$.

$\therefore$数列$\{b_n\}$是等比数列,公比为3,

$\therefore B_n=\frac{3^n-1}{3-1}b_1=\frac{(3^n-1)b_1}{2}$. ………………………………………………………………… 8分

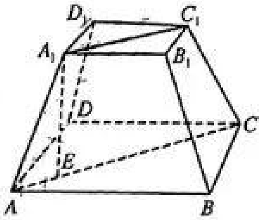
又$\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{B_{n+1}-B_n}{B_{n+1}B_n}=\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}$, ………………………………………………………………… 9分

$\because \frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_2a_3}+\frac{b_4}{a_3a_4}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{3}$恒成立,

$\therefore \frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_2}-\frac{1}{B_3}+\cdots+\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{b_1}\left(1-\frac{2}{3^{n+1}-1}\right)<\frac{1}{3}$,

$\therefore b_1\geqslant 3\left(1-\frac{2}{3^{n+1}-1}\right)$恒成立时,$b_1$的最小值为3. ………………………………………… 12分

19. 解:(1)连接$AC$、$A_1C_1$,(如图所示),在平面$A_1ACC_1$中,过点$A_1$作$A_1E\perp AC$,垂足为$E$,则



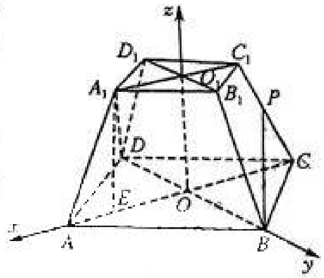

正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积$V=\frac{1}{3}(4^2+2^2+4\times2)\times A_1E=\frac{28\sqrt{2}}{3}$,解得$A_1E=\sqrt{2}$.

………………………………………………………………………………… 3分

因为$A_1E\perp$平面$ABCD$,所以$\angle A_1AC$就是侧棱$AA_1$与底面$ABCD$所成的角,

因为$AE=\frac{1}{2}(AC-A_1C_1)=\sqrt{2}=A_1E$,所以侧棱$AA_1$与底面所成的角是$\frac{\pi}{4}$. ………… 6分

(2)分别连接$BD$、$B_1D_1$,上、下底面对角线分别交于点$O_1$,$O$,如图所示,以点$O$为坐标原点,以$OA$,$OB$,$OO_1$所在直线分别为$x$轴,$y$轴,$z$轴,建立如图所示的空间直角坐标系,




则$A(2\sqrt{2},0,0)$,$B(0,2\sqrt{2},0)$,$A_1(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,$D(0,-2\sqrt{2},0)$,$C(-2\sqrt{2},0,0)$,

$C_1(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$. ………………………………………………………………… 7分

设存在符合条件的点$P$,$\overrightarrow{C_1P}=\lambda\overrightarrow{C_1C}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,设点$P(x,y,z)$,

则$\overrightarrow{C_1P}=(x+\sqrt{2},y,z-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{C_1C}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$,

解得$P(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,0,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$, ……………………………………………………………… 9分

所以$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,-2\sqrt{2},\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$. ………………………………………………… 10分

又因为$\overrightarrow{A_1D}=(-\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2})$,结合$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BP}=0$,解得$\lambda=-2\notin[0,1]$,

所以不存在符合条件的点$P$. ……………………………………………………………………… 12分

20. 解:(1)由题意知$2a=4$,$a=2$, ……………………………………………………………………… 1分

因为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$c=\sqrt{3}$,由$a^2=b^2+c^2$可得$b^2=1$,所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………… 3分

(2)由题意知$l_1$,$l_2$的斜率必存在且不为0,设$l_1$的斜率为$k_1$,$l_2$的斜率为$k_2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则$l_1$的方程为$y=k_1(x-1)$,联立$\begin{cases}y=k_1(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$消去$y$可得$(1+4k_1^2)x^2-8k_1^2x+4k_1^2-4=0$,

$\Delta>0$恒成立,所以$x_1+x_2=\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}$,$x_1x_2=\frac{4k_1^2-4}{1+4k_1^2}$,

所以$x_M=\frac{4k_1^2}{1+4k_1^2}$,$y_M=k_1(x_M-1)=\frac{-k_1}{1+4k_1^2}$, ……………………………………………………… 6分

同理可得$x_N=\frac{4k_2^2}{1+4k_2^2}=\frac{4\times\frac{1}{9k_1^2}}{1+4\times\frac{1}{9k_1^2}}=\frac{4}{9k_1^2+4}$,$y_N=\frac{-k_2}{1+4k_2^2}=\frac{-\frac{1}{3k_1}}{1+4\times\frac{1}{9k_1^2}}=\frac{-3k_1}{9k_1^2+4}$, ………………………… 8分

$k_{MN}=\dfrac{\dfrac{-3k_1}{9k_1^2+4}+\dfrac{k_1}{1+4k_1^2}}{\dfrac{4}{9k_1^2+4}-\dfrac{4k_1^2}{1+4k_1^2}}=\dfrac{-3k_1(1+4k_1^2)+k_1(9k_1^2+4)}{4(1+4k_1^2)-4k_1^2(9k_1^2+4)}=\dfrac{k_1}{4(1+3k_1^2)}$, ………… 10分

所以直线 $MN$ 的方程为 $y-\dfrac{-3k_1}{9k_1^2+4}=\dfrac{k_1}{4(1+3k_1^2)}\left(x-\dfrac{4}{9k_1^2+4}\right)$，即 $y=\dfrac{k_1}{4(1+3k_1^2)}(x-4)$，来源：高三答案公众号

所以直线 $MN$ 过定点，且定点坐标为 $(4,0)$. ………… 12分

21. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由 $f(x)=\dfrac{a}{2}e^{2x}+(a-1)e^x-x-\dfrac{1}{2}(a\in\mathbf{R})$，

得 $f'(x)=ae^{2x}+(a-1)e^x-1=(e^x+1)(ae^x-1)$. ………… 1分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，………… 2分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $ae^x-1=0$，得 $x=-\ln a$，

当 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增. ………… 3分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

………… 4分

(2) 由(1)可知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，则 $f(x)$ 至多有一个零点，所以 $a>0$，………… 5分

当 $a>0$ 时，由(1)得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，

即 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=\dfrac{a}{2}e^{-2\ln a}+(a-1)e^{-\ln a}+\ln a-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}(a-1)+\ln a-\dfrac{1}{2}=\ln a-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2}$. ………… 6分

当 $a=1$ 时，$f(x)_{\min}=\ln 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$，所以 $f(x)$ 只有一个零点，不合题意；………… 7分

当 $a>1$ 时，则 $f(x)_{\min}=\ln a-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2}>0$，所以 $f(x)$ 没有零点，不合题意；………… 8分

当 $0<a<1$ 时，$\ln a-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2}<0$，即 $f(x)_{\min}<0$，

因为 $f(-1)=\dfrac{a}{2e^2}+\dfrac{a-1}{e}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上有一个零点，………… 9分

取正整数 $n_0$，满足 $n_0>\ln\left(\dfrac{4}{a}-2\right)$，则

$f(n_0)=e^{n_0}\left[\dfrac{a}{2}e^{n_0}+(a-1)\right]-n_0-\dfrac{1}{2}>e^{n_0}\left[\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{4}{a}-2\right)+(a-1)\right]-n_0-\dfrac{1}{2}=e^{n_0}-n_0-\dfrac{1}{2}$，

设 $g(x)=e^x-x-\dfrac{1}{2}$，则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=1-\dfrac{1}{2}>0$，所以 $e^{n_0}-n_0-\dfrac{1}{2}>0$.

因为 $\ln\left(\dfrac{4}{a}-2\right)>-\ln a$，所以 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上有一个零点，………… 11分

所以当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

综上，$a$ 的取值范围为 $(0,1)$. ………… 12分

22. 解：(1) 由 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，又 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，

所以 $C_1$ 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$. ………… 2分

由$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），消去参数得$x-y=4$，…………3分

$C_1$的圆心为$(2,0)$，半径为2，则圆心到直线$x-y=4$的距离为$d=\frac{|2-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

所以$|AB|=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.…………5分

(2)曲线$C_3$经过变换$\begin{cases}x'=x-2,\\y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$后得到曲线$C_1$，则$(x'+2-2)^2+(2y')^2=4$，

即曲线$C_3$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.…………6分

设点$P(2\cos\varphi,\sin\varphi)$，则点$P$到直线$AB$的距离为$d=\frac{|2\cos\varphi-\sin\varphi-4|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\varphi-\frac{\sqrt{5}}{5}\sin\varphi\right)-4\right|}{\sqrt{2}}=$

$\frac{|\sqrt{5}\sin(\alpha-\varphi)-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{5}\sin(\alpha-\varphi)}{\sqrt{2}}\left(其中\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，…………8分

故当$\sin(\alpha-\varphi)=1$时，$d$取得最小值，且$d_{\min}=\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，

因此，当点$P$到直线$AB$的距离最小时，$\triangle PAB$的面积也最小，

所以$\triangle PAB$的面积的最小值为$\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_{\min}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=4-\sqrt{5}$.…………10分

23. 解：(1)当$x>2$时，$f(x)\leqslant2x$等价于$x+1+x-2\leqslant2x$，该不等式恒成立，所以$x>2$；…………1分

当$x<-1$时，$f(x)\leqslant2x$等价于$-x-1-x+2\leqslant2x$，解得$x\geqslant\frac{1}{4}$，此时不等式无解；…………2分

当$-1\leqslant x\leqslant2$时，$f(x)\leqslant2x$等价于$x+1-x+2\leqslant2x$，解得$x\geqslant\frac{3}{2}$，所以$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant2$.…………3分

综上所述，不等式的解集为$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.…………4分

(2)由$f(x)\geqslant k\left|x-\frac{1}{2}\right|$，得$|x+1|+|x-2|\geqslant k\left|x-\frac{1}{2}\right|$，

当$x=\frac{1}{2}$时，$3\geqslant0$恒成立，所以$k\in\mathbf{R}$；…………5分

当$x\neq\frac{1}{2}$时，$k\leqslant\frac{|x+1|+|x-2|}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=\frac{\left|x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right|}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=\left|1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|+\left|1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|$恒成立，……7分

因为$\left|1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|+\left|1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|\geqslant\left|\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)+\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)\right|=2$，

当且仅当$\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)\geqslant0$时取等号，所以$k\leqslant2$.

综上所述，$k$的取值范围是$(-\infty,2]$.…………10分