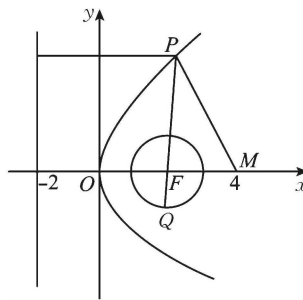


2023~2024 学年上学期高三年级 9 月联考卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1. D $A = \{x | x(x-1)(x-2) = 0\} = \{0, 1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以满足条件的集合 B 的个数为 $2^3 = 8$. 故选 D.
2. C 因为 $\frac{3}{(2-i)i} = \frac{3}{1+2i} = \frac{3(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$, 其共轭复数是 $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$. 故选 C.
3. A 若 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos \alpha > 0$ 成立, 故充分性成立; 若 $\cos \alpha > 0$, 则 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 不一定为 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 故必要性不成立. 所以“ $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ”是“ $\cos \alpha > 0$ ”的充分不必要条件. 故选 A.
4. C 因为 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0, f(4) = -f(-4) = 13$, 所以 $f(0) + f(4) = 13$. 故选 C.
5. A 因为 $(x-y)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} (-y)^r = C_6^r (-1)^r x^{6-r} y^r$, 所以 $\left(1 - \frac{2x}{y}\right) (x-y)^6 = (x-y)^6 - \frac{2x}{y} (x-y)^6$, 展开式中 $x^4 y^2$ 的系数为 $C_6^2 (-1)^2 - 2C_6^3 (-1)^3 = 55$. 故选 A.
6. B 由题意得当 $x=9$ 时, $P=50\%$, 则 $\frac{e^{-0.9+9k}}{1+e^{-0.9+9k}} = 50\%$, 得 $e^{-0.9+9k} = 1$, 所以 $9k - 0.9 = 0$, 得 $k = 0.1$, 所以 $P(x) = \frac{e^{-0.9+0.1x}}{1+e^{-0.9+0.1x}}$. 当 $x=5$ 时, $P(x) = \frac{e^{-0.9+0.1 \times 5}}{1+e^{-0.9+0.1 \times 5}} = \frac{e^{-0.4}}{1+e^{-0.4}} \approx \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = 40\%$. 故选 B.
7. C 函数 $f(x) = x - \frac{1}{3} \sin 2x + a \sin x$ 的导数为 $f'(x) = 1 - \frac{2}{3} \cos 2x + a \cos x$, 由题意可得 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 设 $t = \cos x (-1 \leq t \leq 1)$, 即有 $5 - 4t^2 + 3at \geq 0$, 所以 $5 - 4 + 3a \geq 0$, 且 $5 - 4 - 3a \geq 0$, 解得 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. 故选 C.
8. B 如图, 设圆心为 F , 则 F 为抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 该抛物线的准线方程为 $x = -2$, 设 $P(x, y)$, 由抛物线的定义得 $|PF| = x + 2$, 要使 $\frac{|PM|}{|PQ|}$ 最小, 则 $|PQ|$ 需最大, 如图, $|PQ|$ 最大时, 经过圆心 F , 且圆 F 的半径为 1, $|PQ|_{\max} = |PF| + 1 = x + 3$, 且 $|PM| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 8x} = \sqrt{x^2 + 16}$, 所以 $\frac{|PM|}{|PQ|} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x + 3}$. 令 $x + 3 = t (t \geq 3)$, 则 $x = t - 3$, 所以 $\frac{|PM|}{|PQ|} = \frac{\sqrt{(t-3)^2 + 16}}{t} = \sqrt{\frac{25}{t^2} - \frac{6}{t} + 1} = \sqrt{25\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{25}\right)^2 + \frac{16}{25}}$, 当 $\frac{1}{t} = \frac{3}{25}$, 即 $t = \frac{25}{3}$ 时, $\frac{|PM|}{|PQ|}$ 取得最小值 $\frac{4}{5}$. 故选 B.
9. AC 由图象可知, $\frac{T}{2} = \frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}, T = \pi$, 所以 $\omega = 2$, 当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $\frac{5\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 又 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$



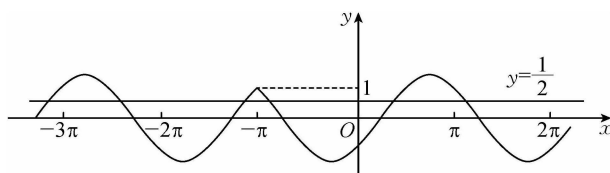
$2\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$, 故选 AC.

10. ABD 对于 A, $(a^2-bc)-(b^2-ac)=(a^2-b^2)+(ac-bc)=(a-b)(a+b+c)>0$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $a^3>a^2, a^2>b^2$, 所以 $a^3>b^2$, 故 B 正确; 对于 C, 当 $a=3, b=2, c=5$ 时, $|a-c|<|b-c|$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}>0$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. BCD 对于 B, $f'(x)=3x^2-2$, 令 $f'(x)>0$, 得 $x>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{6}}{3}$; 令 $f'(x)<0$, 得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<x<\frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}), (\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ 上单调递减, 所以 $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ 是极值点, 故 B 正确; 对于 A, 由 $f(x)$ 的单调性, 知极大值 $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{9}-2<0$, 又 $f(2)=2>0$, 所以函数 $f(x)$ 在定义域上有且仅有一个零点, 故 A 错误; 对于 C, 令 $h(x)=x^3-2x$, 该函数的定义域为 \mathbf{R} , $h(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x=-h(x)$, 则 $h(x)$ 是奇函数, $(0,0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心, 将 $h(x)$ 的图象向下平移 2 个单位得到 $f(x)$ 的图象, 所以点 $(0,-2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心, 故 C 正确; 对于 D, 设切点为 (x_0, y_0) , $f'(x)=3x^2-2$, 则切线的斜率为 $3x_0^2-2$, 切线的方程为 $y-x_0^3+2x_0+2=(3x_0^2-2)(x-x_0)$, 代入 $(-1,0)$, 可得 $-x_0^3+2x_0+2=(3x_0^2-2)(-1-x_0)$, 整理并解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-\frac{3}{2}$, 则过点 $(-1,0)$ 的切线有两条, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. CD 当 $x<-\pi$ 时, $x+\pi<0$, $\operatorname{sgn}(x+\pi)=-1$, $f(x)=-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 当 $x=-\pi$ 时, $x+\pi=0$, $\operatorname{sgn}(x+\pi)=0$, $f(x)=\cos 0=1$, 当 $x>-\pi$ 时, $x+\pi>0$, $\operatorname{sgn}(x+\pi)=1$, $f(x)=\sin x-\cos x=$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \text{ 即 } f(x)=\begin{cases} -\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & x<-\pi, \\ 1, & x=-\pi, \\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & x>-\pi, \end{cases} \text{ 作出 } f(x) \text{ 的部分图象, 如图所示.}$$



由图可知, $f(x)$ 不是周期函数, 故 A 错误; 由图可知, $f(x)$ 在 $\left[-2\pi, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{2}, 1]$, 故 B 错误; 由图可知, $f(x)$ 在 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 故 C 正确; 令 $g(x)=2f(x)-1=0$, 得 $f(x)=\frac{1}{2}$, 由图可知, 在 $[-3\pi, 2\pi]$ 上, $f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 只有 5 个交点, 所以 $g(x)=2f(x)-1$ 在 $[-3\pi, 2\pi]$ 上有 5 个零点, 故 D 正确. 故选 CD.

13.2 因为 $b \perp (b-2a)$, 所以 $b \cdot (b-2a) = b^2 - 2a \cdot b = 0$, $a \cdot b = \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}|b|^2 = 2$, 所以 $|a| =$

$$\frac{a \cdot b}{|b| \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{2 \times \frac{1}{2}} = 2.$$

14. $\frac{13}{4}$ 因为 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2$, 则 $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, 则 $\frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} =$

$$\frac{3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 \times 2^2 + 1}{2 \times 2} = \frac{13}{4}.$$

15.8 $x^2 + \frac{4}{y(x-y)} \geq x^2 + \frac{4}{\left[\frac{y+(x-y)}{2}\right]^2} = x^2 + \frac{16}{x^2}$, 当且仅当 $y = x - y$, 即 $x = 2y$ 时, 等号成立, 又 $x^2 + \frac{16}{x^2}$

$\geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{16}{x^2}} = 8$, 当且仅当 $x^2 = \frac{16}{x^2}$, 即 $x = 2$ 时, 等号成立. 综上所述, 当 $x = 2y = 2$ 时, $x^2 + \frac{4}{y(x-y)}$ 取得最小值 8.

16. $\frac{\sqrt{15}}{7}$ 因为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $c = \frac{1}{2}a$, 又因为 $AN \parallel MF_2$, 即

$$\triangle AF_1N \sim \triangle F_2F_1M, \text{ 则 } \frac{|AN|}{|MF_2|} = \frac{|NF_1|}{|MF_1|} = \frac{|AF_1|}{|F_1F_2|} = \frac{a-c}{2c} = \frac{a - \frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } |AN| = \frac{1}{2}|MF_2|,$$

$|NF_1| = \frac{1}{2}|MF_1|$, 所以 $|AN| + |NF_1| = \frac{1}{2}(|MF_1| + |MF_2|) = a$ ①, 又因为 $|AN| + |NF_2| + a + c =$

$\frac{19}{6}a$, 可得 $|AN| + |NF_2| = \frac{5}{3}a$ ②, 又因为 $|NF_1| + |NF_2| = 2a$ ③, 由 ①②③ 知 $|AN| = \frac{a}{3}, |NF_1| =$

$\frac{2a}{3}$. 在 $\triangle AF_1N$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \angle AF_1N = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2}{2 \times \frac{1}{2}a \times \frac{2}{3}a} = \frac{7}{8} > 0$, 可得 $\angle AF_1N$ 为锐角, 则

$\sin \angle AF_1N = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AF_1N} = \frac{\sqrt{15}}{8}$, 所以 $\tan \angle AF_1N = \frac{\sin \angle AF_1N}{\cos \angle AF_1N} = \frac{\sqrt{15}}{7}$, 即直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{7}$.

17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $S_4 = S_5$,

所以 $a_5 = 0$, 则 $a_1 = -4d$. ① 1 分

又因为 $a_8 - 3a_3 = 18$,

所以 $a_1 + 7d - 3(a_1 + 2d) = 18$, 得 $-2a_1 + d = 18$, ② 2 分

联立 ①②, 解得 $a_1 = -8, d = 2$,

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -8 + (n-1) \times 2 = 2n - 10$ 5 分

(2)由(1)知 $S_n = -8n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 9n$, 6分

所以 $\frac{S_n}{a_n} < 1$, 即为 $\frac{n^2 - 9n}{2n - 10} < 1$,

当 $n < 5$ 时, $n^2 - 9n > 2n - 10$, 解得 $n > 10$ (舍) 或 $n < 1$ (舍); 8分

当 $n > 5$ 时, $n^2 - 9n < 2n - 10$, 解得 $1 < n < 10$, 所以 $5 < n < 10$,

所以满足条件的 n 的取值集合为 $\{6, 7, 8, 9\}$ 10分

18. 解: (1) 根据频率分布直方图中所有小矩形面积之和为 1,

可列等式为 $(0.0002 + 0.0013 + 0.0016 + 0.0032 + 0.0034 + a) \times 100 = 1$,

所以 $a = 0.0003$ 3分

(2) 样本中停车时长在区间 $(300, 500]$ 内的频率为 $(0.0016 + 0.0003) \times 100 = 0.19$, 5分

所以估计该天停车时长在区间 $(300, 500]$ 内的车辆数是 $500 \times 0.19 = 95$ 7分

(3) 设免费停车时间不超过 y 分钟, 又因为 $(0, 100]$ 的频率为 $0.13 < 30\%$, 并且 $(0, 200]$ 的频率为 $0.45 > 30\%$, 所以 y 位于 $(100, 200]$ 之间, 9分

则 $0.13 + (y - 100) \times 0.0032 = 0.3$, 所以 $y \approx 153$,

所以确定免费停车时长为 153 分钟. 12分

19. 解: (1) 因为 $a(\sin A - \sqrt{2}\sin B) = c\sin C - b\sin B$,

所以由正弦定理得 $a^2 - c^2 + b^2 = \sqrt{2}ab$, 2分

所以由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 4分

又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 5分

(2) 因为 $AD = CD$, 所以 $\angle ACD = A$, $\angle BCD = \frac{\pi}{4} - A$, $B = \frac{3\pi}{4} - A$ 6分

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin B}$, 即 $\frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{4} - A)} = \frac{2BD}{\sin(\frac{3\pi}{4} - A)}$, 8分

化简得 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos A = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin A$, 即 $\tan A = \frac{1}{3}$ 10分

所以 $\tan B = \tan(\frac{3\pi}{4} - A) = \frac{\tan \frac{3\pi}{4} - \tan A}{1 + \tan \frac{3\pi}{4} \tan A} = \frac{-1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -2$ 12分

20. (1) 证明: 在正方形 $ABCD$ 中, $CD \perp AD$,

又侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 侧面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD , 2分

又 $AM \subset$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp AM$, 3分

因为 $\triangle PAD$ 是正三角形, M 是 PD 的中点, 所以 $AM \perp PD$, 4分

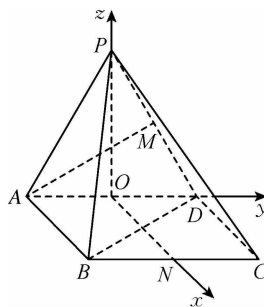
又 $CD \cap PD = D, CD, PD \subset \text{平面 } PCD$,

所以 $AM \perp \text{平面 } PCD$ 6分

(2)解:取 AD 中点为 O, BC 中点为 N , 连接 OP, ON , 建立如图所示的空间直角坐标系, 不妨设 $AD=2$,

则 $A(0, -1, 0), D(0, 1, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), B(2, -1, 0), M(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

所以 $\vec{PD} = (0, 1, -\sqrt{3}), \vec{BD} = (-2, 2, 0)$ 7分



设平面 PBD 的法向量为 $m = (x, y, z)$, 则

$$\text{由} \begin{cases} \vec{PD} \cdot m = y - \sqrt{3}z = 0, \\ \vec{BD} \cdot m = -2x + 2y = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} y = \sqrt{3}z, \\ y = x, \end{cases}$$

取 $z=1$, 则 $m = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$, 9分

由(1)知平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{AM} = (0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 10分

设平面 BPD 与平面 PCD 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{AM}, m \rangle| = \frac{|\vec{AM} \cdot m|}{|\vec{AM}| |m|} = \frac{|(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)|}{\sqrt{3} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

所以平面 BPD 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 12分

21. 解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2m}{(x+1)^2}$, 1分

当 $m=0$ 时, $f(x)=0$ 无单调性; 2分

当 $m>0$ 时, $f'(x)>0$ 对任意 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$, 无单调递减区间; 3分

当 $m<0$ 时, $f'(x)<0$ 对任意 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$, 无单调递增区间. 4分

(2) 不等式 $f(x) > \ln x$, 即 $\frac{m(x-1)}{x+1} > \ln x$, 则 $\ln x - \frac{m(x-1)}{x+1} < 0$.

设 $h(x) = \ln x - \frac{m(x-1)}{x+1}$, $x \in (1, +\infty)$, 依题意, 存在 $x \in (1, +\infty)$, $h(x) < 0$, 5分

$$\text{而 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2m}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2(1-m)x + 1}{x(x+1)^2}, h(1) = 0,$$

当 $m \leq 0$ 时, $h(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 不满足题意; 6分

当 $0 < m \leq 2$ 时, 方程 $x^2 + 2(1-m)x + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = 4(1-m)^2 - 4 = 4m(m-2) \leq 0$,

即 $h'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$h(x) > h(1) = 0$, $h(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 不满足题意; 8分

当 $m > 2$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x_1 = m-1 - \sqrt{(m-1)^2 - 1}, x_2 = m-1 + \sqrt{(m-1)^2 - 1}$,

由 $x_2 > 1$ 和 $x_1 x_2 = 1$, 得 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则当 $x \in (1, x_2)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上单调递减,

此时 $h(x) < h(1) = 0$,

因此, 当 $m \in (2, +\infty)$ 时, 存在 $x \in (1, +\infty)$, 使得不等式 $h(x) < 0$ 成立, 11 分

所以满足题意的 m 的取值范围为 $(2, +\infty)$ 12 分

22. 解: (1) 若 $b < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为 $a^2 + b^2 = 1$, 所以 $b^2 < \frac{1}{2}$,

则 $a^2 = 1 - b^2 > \frac{1}{2}$, 所以 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 2 分

则 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} < \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$, 3 分

又 $e > 1$, 所以 C 的离心率的取值范围是 $(1, \sqrt{2})$ 4 分

(2) 因为 $F(1, 0)$, 直线 l 的斜率不为零, 所以可设其方程为 $x = my + 1$.

结合 $b^2 = 1 - a^2$ ($0 < a < 1$),

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1, \end{cases} \text{得} [a^2(m^2+1) - m^2]y^2 + 2m(a^2-1)y - (a^2-1)^2 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由韦达定理, 得} \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-2m(a^2-1)}{a^2(m^2+1) - m^2}, \\ y_1 y_2 = \frac{-(a^2-1)^2}{a^2(m^2+1) - m^2}, \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由于 A, B 两点均在 C 的右支上,

故 $y_1 y_2 < 0 \Rightarrow a^2(m^2+1) - m^2 > 0$, 即 $m^2 < \frac{a^2}{1-a^2}$ 7 分

$$\text{则 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (my_1 + 1)(my_2 + 1) + y_1 y_2$$

$$= (m^2 + 1)y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1$$

$$= (m^2 + 1) \cdot \frac{-(a^2-1)^2}{a^2(m^2+1) - m^2} + m \cdot \frac{-2m(a^2-1)}{a^2(m^2+1) - m^2} + 1$$

$$= \frac{m^2 a^2 (1-a^2) - a^4 + 3a^2 - 1}{a^2(m^2+1) - m^2}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

由 $\angle AOB$ 恒为锐角, 得对 $\forall m^2 < \frac{a^2}{1-a^2}$, 均有 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0$,

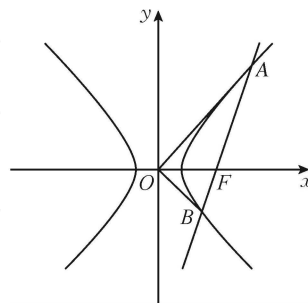
即 $m^2 a^2 (1-a^2) - a^4 + 3a^2 - 1 > 0$ 恒成立. 10 分

由于 $a^2(1-a^2) > 0$, 因此不等号左边是关于 m^2 的增函数,

所以只需 $m^2 = 0$ 时, $-a^4 + 3a^2 - 1 > 0$ 成立即可, 解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

结合 $0 < a < 1$, 可知 a 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ 11 分

综上所述, C 的实轴长的取值范围是 $(\sqrt{5}-1, 2)$ 12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

