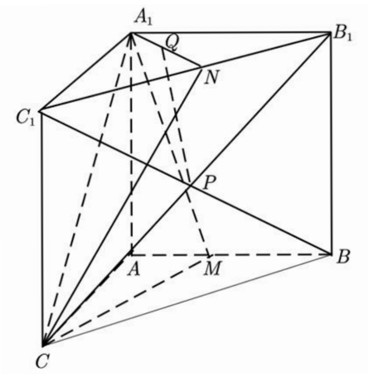
如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为4，$AB=AC=AA_1=2$，M为AB的中点，N为B_1C_1的中点，P是BC_1与B_1C的交点．

(1)证明：$A_1C\perp BC_1$；

(2)在线段A_1N上是否存在点Q，使得PQ //平面A_1CM？若存在，请确定Q的位置；若不存在，请说明理由．



21．（本小题12分）

已知抛物线$y^2=4\sqrt{3}x$的准线过椭圆E的左焦点，且椭圆E的一个焦点与短轴的两个端点构成一个正三角形．

(1)求椭圆E的方程;

(2)直线$y=\frac{1}{2}$交椭圆E于A，B两点，点P在线段AB上移动，连接OP交椭圆于M，N两点，过P作MN的垂线交x轴于Q，求$\triangle MNQ$面积的最小值．

22．（本小题12分）

已知函数$f(x)=ax\ln x$和$g(x)=b(x-\sqrt{x})(b>0)$有相同的最小值．

(1)求$a+\frac{1}{b}$的最小值;

(2)设$h(x)=f(x)+g(x)$，方程$h(x)=m$有两个不相等的实根x_1，x_2，求证：$\frac{1}{2}<x_1+x_2<2$．

答案和解析

1.C【解析】$\because B=\{x|x<1\}$，$\therefore \complement_U B=\{x|x\geq 1\}$，

$\therefore A\cap(\complement_U B)=\{x|-2<x<3\}\cap\{x|x\geq 1\}=\{x|1\leq x<3\}$．故选$C$．

2.D【解析】$z=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{2}==\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$,

$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$，其虚部为$-\frac{1}{2}$．故选$D$

3.D 【解析】$\because \vec{a} \perp (\vec{b}+\vec{c})$，$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$.

$\therefore |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+|\vec{a}||\vec{c}|\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=0$，

又$\because$ $|\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{c}|$，$<\vec{a}$，$\vec{b}>=60^{\circ}$，$\therefore \sqrt{2}\cdot|\vec{a}||\vec{c}|\cdot\frac{1}{2}+|\vec{a}||\vec{c}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=0$.

由题意可知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为非零向量，则$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\frac{3\pi}{4}$.

4.C 【解析】根据题意，分2步：

①从3种适合放入十字格的食物中，选一种放两个十字格，有$C_3^1=3$种，

②2种适合放入四角格，可分为一种放三个位置，另一种放一个位置，有两种放法，或每种都放两个位置，有一种放法，故四角格共有3种放法;

则一共可以有$3\times3=9$种不同放法；故选：C.

5.C 【解析】已知$f(x)=\begin{cases}e^{x-2},x<4,\\log_5(x-1),x\geqslant4,\end{cases}$

则$f(26)=\log_5(26-1)=2$，

所以$f[f(26)]=f(2)=e^{2-2}=1$．故选 C.

6.A 【解析】函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得函数解析式为

$g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，它的图象关于$y$轴对称，

则$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore$ $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，最小正周期为$m=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

极大值点为$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$

$x=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$，与$\pi$最接近的极大值点是$\frac{7\pi}{6}$，

$\therefore |m-n|$的最小值是$\frac{\pi}{6}$．故选 A.

7.A 【解析】圆C:$x^2+y^2-4y=0$的方程可化为C:$x^2+(y-2)^2=4$，所以圆心$C(0,2)$.

设两条切线的交点为$P(4,m)$，则以PC为直径的圆的圆心为$(2,\frac{m+2}{2})$，

设以PC为直径的圆的半径为r，

则$r=\frac{|PC|}{2}=\frac{\sqrt{4^2+(m-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{16+(m-2)^2}}{2}$.

所以以PC为直径的圆的方程为$(x-2)^2+(y-\frac{m+2}{2})^2=\frac{16+(m-2)^2}{4}$.

$\because$过点$P(4,m)$作圆C:$x^2+y^2-4y=0$的切点分别为A，B，

$\therefore$ 两圆的交点为A，B，即两圆的公共弦为AB.

将两圆的方程相减可得直线AB的方程为$4x+(m-2)y-2m=0$，

即$m(y-2)+(4x-2y)=0$.令$\begin{cases}y-2=0\\4x-2y=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

所以直线AB必过定点(1,2)．故选：A.

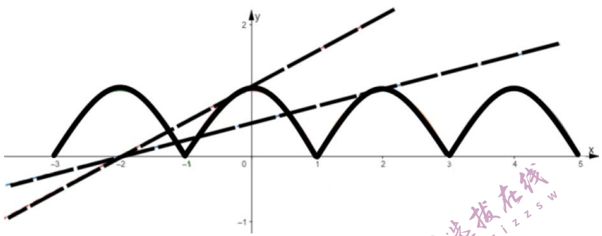
8.A 【解析】由$f(x)$是定义域为R的偶函数，且$f(1-x)=f(1+x)$，

可得$f(x+2)=f(-x)=f(x)$，所以函数的周期是2.

当$-1\le x\le 0$时，$f(x)=-x^2+1$，所以当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=f(-x)=-x^2+1$，

即当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=-x^2+1$，当$1\leqslant x\leqslant 3$时，$f(x)=f(x-2)=-(x-2)^2+1$，

画出函数$f(x)$的图象如下图所示：



函数$g(x)=f(x)-k(x+2)$，$(k>0)$有3个不同的零点，

则函数$f(x)$与直线$y=k(x+2)$，$(k>0)$有3个交点，

当直线$y=k(x+2)$，$(k>0)$与$f(x)=-x^2+1(-1\leqslant x\leqslant 1)$相切时，

由$k(x+2)=-x^2+1$可得$x^2+kx+2k-1=0$，

$\varDelta=k^2-4(2k-1)=0$，解得$k=4-2\sqrt{3}$或$k=4+2\sqrt{3}$(舍)，

当直线$y=k(x+2)$，$(k>0)$与$f(x)=-(x-2)^2+1(1\leqslant x\leqslant 3)$相切时，

由$k(x+2)=-(x-2)^2+1$可得$x^2+(k-4)x+2k+3=0$，

则$\varDelta=(k-4)^2-4(2k+3)=0$，解得$k=8-2\sqrt{15}$或$k=8+2\sqrt{15}$(舍)，

结合函数图象可知，当$8-2\sqrt{15}<k<4-2\sqrt{3}$时，函数$f(x)$与直线$y=k(x+2)$，$(k>0)$有3个交点，所以$k$的取值范围是$(8-2\sqrt{15},4-2\sqrt{3})$.故答案为$A$.

9.BCD 【解析】$4a_1=4S_1={a_1}^2+2a_1,a_1=2$ 或 0，

当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，

$\therefore$ $4a_n=(a_n^2+2a_n)-a_{n-1}^2-2a_{n-1}$，

$\therefore$ $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，

$\therefore a_n+a_{n-1}=0$，或$a_n-a_{n-1}-2=0$，

当$a_n+a_{n-1}=0$，若$a_1=2$，则数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为-1，A 错误，C 正确，

当$a_n-a_{n-1}-2=0$，数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为2，B 正确，

若$a_1=2$，当$a_n+a_{n-1}=0$时，$S_4=0$，当$a_n-a_{n-1}-2=0$时，$S_4=4\times 2+6\times 2=20$，

若$a_1=0$，当$a_n+a_{n-1}=0$时，$S_4=0$，当$a_n-a_{n-1}-2=0$时，$S_4=4\times 0+6\times 2=12$，故 D 正确，

故选 BCD.

10.BD 【解析】选项 A：若$x<0$，则$-x>0$，故$-x+(-\frac{1}{x})\geq 2\sqrt{(-x)\cdot(-\frac{1}{x})}=2$，则$y=-[-x+(-\frac{1}{x})]\leq -2$，

当且仅当$x=-1$时等号成立，故$y=x+\frac{1}{x}$有最大值-2，无最小值，选项 A 错误；

选项 B：因为$x>0$，$y>0$，则$x+3y\geqslant 2\sqrt{3xy}$，当且仅当$x=3y=3$时等号成立，

又$x+3y=9-xy$，则$9-xy\geqslant 2\sqrt{3xy}$，

即$(\sqrt{xy})^2+2\sqrt{3}\sqrt{xy}-9\leqslant 0$，可解得$\sqrt{xy}\leqslant\sqrt{3}$，即$xy\leqslant 3$，选项 B 正确；

选项 C：因为$f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant 2$，

当且仅当$\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$等号成立，显然$\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$无解，

故$f(x)$取不到最小值2，选项 C 错误；

选项 D：因为$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{1+b}=1$，所以$a+b+2=(a+1)+(1+b)=[(a+1)+(1+b)][\frac{1}{a+1}+\frac{1}{1+b}]=2+\frac{a+1}{1+b}+\frac{1+b}{a+1}$，

因为$a>0$，$b>0$，故$\frac{a+1}{1+b}>0$，则$2+\frac{a+1}{1+b}+\frac{1+b}{a+1}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{a+1}{1+b}\cdot\frac{1+b}{a+1}}=4$，

当且仅当$\frac{a+1}{1+b}=\frac{1+b}{a+1}$时等号成立，即$a=b=1$时等号成立，

故$a+b+2\geqslant 4$，即可得$a+b\geqslant 2$，故$a+b$的最小值为2，选项 D 正确.

11.AC 【解析】对于A，由直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，$\therefore AA_1//BB_1$，

$\therefore \angle B_1BE$为直线AA_1与直线BE所成角，

当E与B_1重合时，直线AA_1与直线BE所成角为0，

当E与C_1重合时，直线AA_1与直线BE所成角为$\frac{\pi}{4}$，

所以直线AA_1与直线BE所成角的范围是$[0,\frac{\pi}{4}]$，故 A 正确；

对于B，假设$AB_1\perp$平面A_1BE，又$BE\subset$平面A_1BE，

$\therefore AB_1\perp BE$，设BC中点为H，

则$AH\perp BC$，又$AH\perp BB_1$，$BC\cap BB_1=B$，BC，$BB_1\subset$平面BCC_1B_1，

则$AH \perp$平面BCC_1B_1，

又$BE \subset$平面BCC_1B_1，$\therefore AH \perp BE$，

又$AB_1 \cap AH = A$，AB_1，$AH \subset$平面AB_1H，

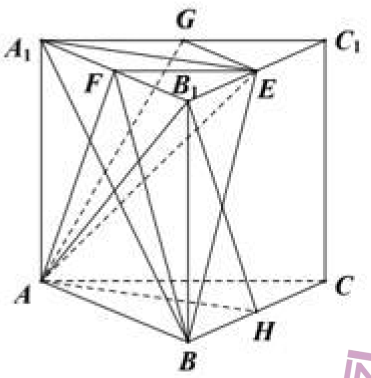
所以$BE \perp$平面AB_1H，又$B_1H \subset$平面AB_1H，

所以$B_1H \perp BE$，

又因为四边形BCC_1B_1为正方形，

所以点E为CC_1中点，与点E为棱B_1C_1上一点矛盾，故 B 错误.

对于C，取A_1C_1中点G，连结EG，GA，



则平面ABE截三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$所得截面为等腰梯形$ABEG$，$AB = 1$，$EG = \frac{1}{2}$，

在直角$\triangle BB_1E$中，$EB = \frac{\sqrt{5}}{2}$，所以梯形的高为$\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{19}}{4}$，

梯形的面积为$S = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}+1) \times \frac{\sqrt{19}}{4} = \frac{3\sqrt{19}}{16}$，故 C 正确.

对于D，因为$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}AB \times BB_1 = \frac{1}{2}$，且$V_{F-ABE} = V_{E-ABF}$，

所以当E与C_1重合时，三棱锥$F-ABE$的体积最大，取A_1B_1中点M，

则$C_1M \perp$平面ABB_1A_1，得$V_{C_1-ABF} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABF} \times C_1M = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$，故 D 错误．故选：AC.

12.ACD 【解析】$\because F_1(-c,0)$到$y = \sqrt{3}x$的距离为$3\sqrt{3}$，$\therefore \frac{\sqrt{3}c}{2} = 3\sqrt{3}$，解得$c = 6$，

又渐近线方程为$y = \sqrt{3}x$，则$\frac{b}{a} = \sqrt{3}$，结合$a^2 + b^2 = c^2$可解得$a = 3$，$b = 3\sqrt{3}$，

则双曲线的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27} = 1$，故 A 正确;

$\because PQ$为$\angle F_1PF_2$的平分线，$\therefore \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|} = \frac{8}{4} = 2$，故 B 错误;

由双曲线定义可得$|PF_1|-|PF_2| = 6$，则可得$|PF_1| = 12$，$|PF_2| = 6$，

则在$\triangle PF_1F_2$中，$\cos\angle F_1PF_2 = \frac{12^2 + 6^2-12^2}{2 \times 12 \times 6} = \frac{1}{4}$，

则$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|^2=\overrightarrow{PF_1}^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+\overrightarrow{PF_2}^2=12^2+2\times12\times6\times\frac{1}{4}+6^2=216$，

则$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=2|\overrightarrow{PO}|=6\sqrt{6}$，即$|OP|=3\sqrt{6}$，故 C 正确;

在$\triangle PF_1F_2$中，$\sin\angle F_1PF_2=\sqrt{1-\cos^2\angle F_1PF_2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$,

设点P到x轴的距离为d，则$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times d=\frac{1}{2}|PF_1|\times|PF_2|\times\sin\angle F_1PF_2$，

即$\frac{1}{2}\times12\times d=\frac{1}{2}\times12\times6\times\frac{\sqrt{15}}{4}$，解得$d=\frac{3\sqrt{15}}{2}$，故 D 正确.

13.$\frac{15}{19}$

【解析】设事件A =“感染流行感冒”，事件B =“未接种疫苗”，则

$P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{19}{100}$，$P(AB)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$，

故$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{15}{19}$

故答案为：$\frac{15}{19}$.

14.$ex+y+1=0$

【解析】函数$f(x)$是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数，

当$x>0$时，$f(x)=e^x-1$，

当$x<0$时，$-x>0$，则$f(-x)=e^{-x}-1$，

所以$f(x)=f(-x)=e^{-x}-1$，所以$f(-1)=e-1$，

当$x<0$时，$f'(x)=-e^{-x}$，则$f'(-1)=-e$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线的斜率为$-e$，切点为$(-1,e-1)$，

所以切线的方程为$y-(e-1)=-e(x+1)$，即$ex+y+1=0$.

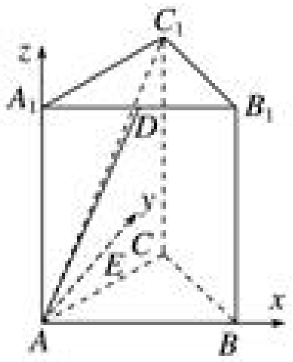
故答案为：$ex+y+1=0$.

15.$\frac{\pi}{6}$

【解析】以A为原点，以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}(AE\perp AB)$，

$\overrightarrow{AA_1}$所在直线分别为x轴，y轴，z轴(如图)建立空间直角坐标系，

设D为A_1B_1的中点，如图所示：



则$A(0,0,0)$，$C_1(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$D(1,0,2\sqrt{2})$，

$\therefore \overrightarrow{AC_1}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AD}=(1,0,2\sqrt{2})$.

易知$C_1D\perp A_1B_1$，$AA_1\perp C_1D$，$A_1B_1\cap AA_1=A_1$，$A_1B_1,AA_1\subset$平面ABB_1A_1，

故$C_1D\perp$平面ABB_1A_1，

所以$\angle C_1AD$为AC_1与平面ABB_1A_1所成的角，

$\cos\angle C_1AD=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\frac{1\times1+\sqrt{3}\times0+2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}{\sqrt{12}\times\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又$\because \angle C_1AD\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\therefore \angle C_1AD=\frac{\pi}{6}$，故答案为$\frac{\pi}{6}$.

16.$2x+2y-3=0$

【解析】设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题意得$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1,\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1$，

两式相减化简得$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$,

由$P\left(1,\frac{1}{2}\right)$是$AB$中点，得$x_1+x_2=2,y_1+y_2=1$，

代入得直线AB斜率$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，故直线$AB$方程为$y-\frac{1}{2}=-(x-1)$，即$2x+2y-3=0$，

因为点P在椭圆内，故直线与椭圆相交，

故答案为：$2x+2y-3=0$.

17.解：$\because (c-a)(c+a)+abcosC=\frac{2\sqrt{3}}{3}S$,

又$\because$由余弦定理可得$cosC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

$\therefore c^2-a^2+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}S$,

$\therefore bccosA=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}bcsinA$,

$\therefore cosA=\frac{\sqrt{3}}{3}sinA$，即$tanA=\sqrt{3}$，

又$\because A\in(0,\pi)$,

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2) $\because cosBcosC-sinBsinC=\cos(B+C)=-cosA=-\frac{1}{2}$,

又 $\because 4cosB\cdot cosC=1$,

$\therefore sinBsinC=cosBcosC+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,

$\because \frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=\frac{a}{sinA}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$,

$\therefore b=4sinB$, $c=4sinC$,

$\therefore S=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}\cdot 4sinB\cdot 4sinC\cdot sinA=8\times\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

18.解: $\because a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$,

$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$,

$\therefore \{a_n\}$为等比数列,设公比为q,

又$a_1=3,a_2a_3=a_1^2q^3=243$, $\therefore q=3$,

$\therefore a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$;

(2)$b_n=log_3a_n=log_33^n=nlog_33=n$,

$\therefore S_n=\frac{n(1+n)}{2}$, $\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(1+n)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$,

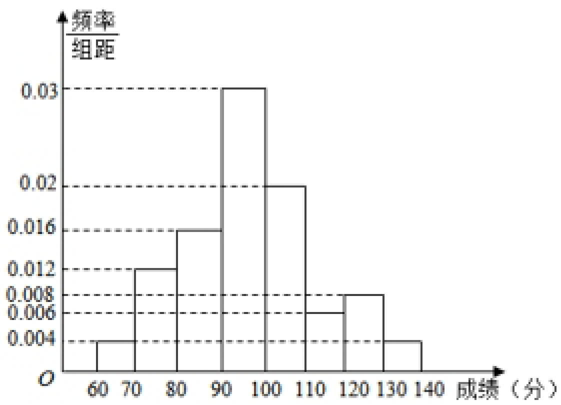
$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{n-1}}+\frac{1}{S_n}=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1})$

$=\frac{2n}{n+1}$.

19.解:(1)由频率分布直方图得第七组的频率为:

$1-(0.004+0.012+0.016+0.03+0.02+0.006+0.004)\times 10=0.08$,

频率分布直方图如右图.



(2)由频率分布直方图得[60,90)的频率为：$(0.004+0.012+0.016)\times 10=0.32$，

频率为[90,100)的频率为：$0.03\times 10=0.3$，

$\therefore$估计该校高三年级的这500名学生的这次考试成绩的中位数为：

$90+\frac{0.5-0.32}{0.3}\times 10=96$.

(3)样本中第一组有学生：$50\times 0.004\times 10=2$人，设这2人为$a$，$b$;

第六组有学生：$50\times 0.006\times 10=3$人，设这3人为1，2，3;

从样本成绩属于第一组和第六组的所有学生中随机抽取2名的情况有

$ab,a1,a2,a3,b1,b2,b3,12,13,23$，共10种，

这2名学生的分数差的绝对值大于10分包含的情况有$a1,a2,a3,b1,b2,b3$，共6种，

$\therefore$这2名学生的分数差的绝对值大于10分的概率$P=\frac{6}{10}=0.6$.

20.解：(1)由棱柱的体积公式$V=S_{\Delta ABC}|AA_1|$，可得$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=2$，

又$AB=AC=2$，可知$sin\angle BAC=1,\angle BAC=90°$，

$\triangle A_1B_1C_1$中，$A_1B_1=B_1C_1$，N为B_1C_1的中点，可得$A_1N\perp B_1C_1$，

又$B_1B\perp$平面$A_1B_1C_1$，$A_1N\subset$平面$A_1B_1C_1$，

可得$B_1B\perp A_1N$，而$B_1B\cap B_1C_1=B_1$，

所以$A_1N\perp$平面B_1BCC_1，即有$A_1N\perp BC_1$，

连接CN，

由$tan\angle C_1CN=\frac{C_1N}{C_1C}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$tan\angle CC_1B=\frac{CB}{C_1C}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

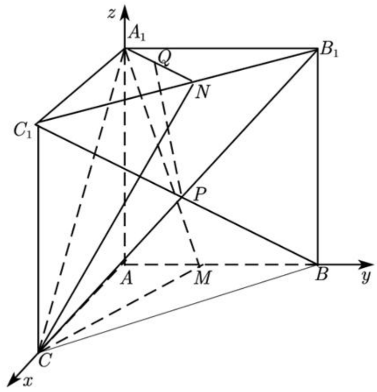
则$\tan\angle C_1CN\cdot\tan\angle CC_1B=1$，可得$\angle C_1CN+\angle CC_1B=90°$，

即有$BC_1\perp CN$，而$CN\cap A_1N=N$，

所以$BC_1\perp$平面A_1CN，

则$A_1C\perp BC_1$；

(2)以A为原点，以AC，AB，AA_1为坐标轴建立空间直角坐标系$A-xyz$，



则$A_1(0,0,2)$，$C(2,0,0)$，$M(0,1,0)$，$N(1,1,2)$，$P(1,1,1)$，

所以$\overrightarrow{A_1N}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{A_1P}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{CM}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{CA_1}=(-2,0,2)$，

设平面A_1CM的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=-2x+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CM}=-2x+y=0\end{cases}$，

令$y=2$，可得$\vec{n}=(1,2,1)$，

设$\overrightarrow{A_1Q}=m\overrightarrow{A_1N}=(m,m,0)$，$m\in[0,1]$，

则$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{A_1Q}-\overrightarrow{A_1P}=(m-1,m-1,1)$，

所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=m-1+2(m-1)+1=3m-2$，

当$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}$时，可得$PQ//$平面$A_1CM$，

所以$3m-2=0$，即$m=\frac{2}{3}$.

所以在线段A_1N上存在点Q，且当$A_1Q=\frac{2}{3}A_1N$时，$PQ//$平面A_1CM.

21.解：(1)由题知抛物线的准线为直线$x=-\sqrt{3}$，过椭圆E的左焦点，

$\therefore c=\sqrt{3}$.

$\because$椭圆E的一个焦点与短轴的两个端点构成一个正三角形，

$\therefore b=1,a=2$，

故椭圆E的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由(1)得椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

$\because MN$的垂线交x轴于点Q，

$\therefore MN$的斜率存在，

$\because$连接OP交椭圆于M，N两点，

$\therefore MN$的斜率不为0.

不妨设l_{MN}：$y=kx$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则$P\left(\frac{1}{2k},\frac{1}{2}\right)$，

联立$\begin{cases} y=kx, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$

即$(1+4k^2)x^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_2=0, x_1x_2=\frac{-4}{1+4k^2}$，

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{16}{1+4k^2}}$.

设$Q(m,0)$，

$\because PQ\perp MN$，

$\therefore k_{PQ}\cdot k_{MN}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2k}-m}\cdot k=-1$，

解得：$m=\frac{1}{2k}+\frac{k}{2}$，

$\therefore$ Q到直线MN的距离为：$d=\frac{|k\cdot(\frac{1}{2k}+\frac{k}{2})|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{k^2}{2}}{\sqrt{1+k^2}}$，

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle MNQ}&=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{16}{1+4k^2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}+\frac{k^2}{2}}{\sqrt{1+k^2}}\\&=\frac{1+k^2}{\sqrt{1+4k^2}}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1+4k^2+3}{\sqrt{1+4k^2}}\\&=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4k^2}+\frac{3}{\sqrt{1+4k^2}}\right)\\&\geq\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{\sqrt{1+4k^2}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+4k^2}}}\end{aligned}$$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当$\sqrt{1+4k^2}=\frac{3}{\sqrt{1+4k^2}}$，即$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，

故$\triangle MNQ$面积的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.解：(1)因为$g(x)=b(x-\sqrt{x})=b[(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]$，

所以$g(x)_{\min}=g(\frac{1}{4})=-\frac{b}{4}$;

$f(x)=ax\ln x$定义域$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=a(\ln x+1)$，

令$f'(x)=0$得，$x=\frac{1}{e}$，

当$a>0$时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递增，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递减；

当$a=0$时，$f(x)=0$，要使$f(x)$与$g(x)$有相同的最小值，

则$a>0$，$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=\frac{a}{-e}=-\frac{b}{4}$，

所以$a=\frac{eb}{4}$，

所以$a+\frac{1}{b}=\frac{eb}{4}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{eb}{4}\cdot\frac{1}{b}}=\sqrt{e}$，

当且仅当$b=\frac{2}{\sqrt{e}}$时，取等号；

(2)由已知得$h(x)=f(x)+g(x)=\frac{e}{4}bx\ln x+b(x-\sqrt{x})$，$h'(x)=\frac{e}{4}b(\ln x+1)+b(1-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$，

令$H(x)=\frac{e}{4}b(\ln x+1)+b(1-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$，则$H'(x)=\frac{e}{4}b\cdot\frac{1}{x}+b\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}>0$恒成立，

则$H(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为$h'(e^{-2})=\frac{e}{4}b(-2+1)+b(1-\frac{e}{2})=b(1-\frac{3e}{4})<0$，$h'(1)>0$，存在$x_0\in(e^{-2},1)$使得$h'(x_0)=0$，

$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

又因为$h(1)=0$，

当$0<x<1$时，$h(x)<0$，

因此若方程$h(x)=m$有两个不相等的实根x_1，x_2(不妨设$x_1<x_2$)，

则必有$0<x_1<x_2<1$，

因此$x_1+x_2<2$；

下证$x_1+x_2>\frac{1}{2}$，

由$h(x_1)=h(x_2)=m$，得$\frac{e}{4}bx_1\ln x_1+b(x_1-\sqrt{x_1})=\frac{e}{4}bx_2\ln x_2+b(x_2-\sqrt{x_2})=m$，

则$(x_1-\sqrt{x_1})(\frac{e\sqrt{x}}{4\sqrt{x_1}})_1-1+1)=(x_2-\sqrt{x_2})(\frac{e\sqrt{x_2}}{4\sqrt{x_2}}-1)=\frac{m}{b}$，

令$m(x)=\frac{\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}-1}(0<x<1)$，

令$t=\sqrt{x}\in(0,1)$，则$m(t)=\frac{2t\ln t}{t-1}$，

则$m'(t)=\frac{2(\ln t+1)(t-1)-2t\ln t}{(t-1)^2}=\frac{2(t-1-\ln t)}{(t-1)^2}$，

令$n(t)=t-1-\ln t(0<t<1)$，

则$n'(t)=1-\frac{1}{t}<0$成立，

所以$n(t)$在$(0,1)$上单调递减，

$n(t)>n(1)=0$，即当$0<t<1$时，$m'(t)>0$成立，

所以$m(t)$在$(0,1)$上单调递增，即$m(x)$在$(0,1)$上单调递增，

故$0<m(x_1)<m(x_2)$，

由于$x_2-\sqrt{x_2}<0$，

因此

$$(x_1-\sqrt{x_1})(\frac{e}{4}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^{\ln x_1}+1)=(x_2-\sqrt{x_2})(\frac{e}{4}\sqrt{x_2})x_2-1+1)<(x_2-\sqrt{x_2})(\frac{e}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^{lx_1}-1^{-1}+1)}\text{，}$$

得$x_1-\sqrt{x_1}<x_2-\sqrt{x_2}\Leftrightarrow(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})>\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}$，得$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>1$，

所以$x_1+x_2>2\left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

综上$\frac{1}{2}<x_1+x_2<2$.