

鄂南高中 华师一附中 黄石二中 荆州中学
孝感高中 襄阳四中 襄阳五中 黄冈中学

2020 届高三八校第一次联考
数 学 (理 科)

2019.12

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

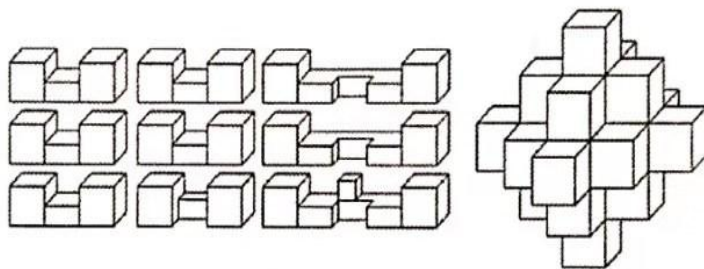
1. 复数 z 满足 $(1+i)z = |1-i|$, 则 $z =$
 A. $1-i$ B. $1+i$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
2. 已知集合 $X = \{x \mid e^x > \frac{1}{2}\}$, $Y = \{x \mid x^2 + x - 6 \leq 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} X) \cap Y =$
 A. $[-3, -\ln 2)$ B. $[-2, -\ln 2]$ C. $[-3, -\ln 2]$ D. $[-\ln 2, 2]$
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1, \frac{S_3}{3}, a_4$ 成公比为 q 的等比数列, 则 q 等于
 A. 1 或 2 B. 2 C. 1 D. 2 或 4
4. 若 $\sin(\frac{\pi}{6} - \theta) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin(\frac{\pi}{6} + 2\theta) =$
 A. $-\frac{24}{25}$ B. $\frac{24}{25}$ C. $-\frac{7}{25}$ D. $\frac{7}{25}$
5. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 则 $x+y$ 的最小值为
 A. 12 B. 16 C. 20 D. 24
6. 若函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[a, b]$ 上是减函数, 且 $f(a) = 2, f(b) = -2$, 则函数 $g(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$ 在区间 $[a, b]$ 上
 A. 是增函数 B. 是减函数 C. 可以取得最大值 2 D. 可以取得最小值 -2
7. 已知 $a = \log_2 0.3, b = \log_{0.2} 3, c = 0.2^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为
 A. $c > b > a$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$

数学(理科)试题 第 1 页(共 4 页)

8. 已知曲线 $C: f(x) = x^3 - 3x$, 直线 $l: y = ax - \sqrt{3}a$, 则 $a = 6$ 是直线 l 与曲线 C 相切的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 鲁班锁是中国古代传统土木建筑中常用的固定结合器,也是广泛流传于中国民间的智力玩具,它起源于古代中国建筑首创的榫卯结构.这种三维的拼插器具内部的凹凸部分(即榫卯结构)啮合,外观看上去是严丝合缝的十字几何体,其上下、左右、前后完全对称,十分巧妙.鲁班锁的种类各式各样,其中以最常见的六根和九根的鲁班锁最为著名.九根的鲁班锁由如图所示的九根木棒拼成,每根木棒都是由一根正四棱柱状的木条挖一些凹槽而成.若九根正四棱柱底面边长均为1,其中六根短条的高均为3,三根长条的高均为5,现将拼好的鲁班锁放进一个圆柱形容器内,使鲁班锁最高的一个正四棱柱形木棒的上、下底面分别在圆柱的两个底面内,则该圆柱形容器的体积(容器壁的厚度忽略不计)的最小值为



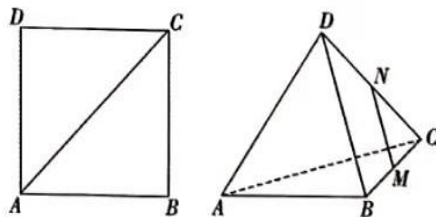
- A. $\frac{135}{4}\pi$ B. $\frac{65}{2}\pi$ C. 135π D. $\frac{125}{4}\pi$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 且 $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) > 1$, 且 $f(1) = 0$, 则

- A. $f(e) < e - 1$ B. $f(0) > -1$ C. $f(0) < -1$ D. $f(e) < f(0) + e$

11. 如图, M, N 分别为边长为1的正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 的中点, 将正方形沿对角线 AC 折起, 使点 D 不在平面 ABC 内, 则在翻折过程中, 以下结论错误的是

- A. $MN \parallel$ 平面 ABD
 B. 异面直线 AC 与 BD 所成的角为定值
 C. 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直
 D. 三棱锥 $M-ACN$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{48}$



12. 已知函数 $f(x) = \sin x \cdot |\sin x|$, 给出下列结论: ① $f(x)$ 是周期函数; ② $f(x)$ 是奇函数; ③ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 是函数 $f(x)$ 的一个单调递增区间; ④ 若 $f(x_1) = -f(x_2)$, 则 $x_1 + x_2 = k\pi (k \in \mathbf{Z})$; ⑤ 不等式 $\sin 2\pi x \cdot |\sin 2\pi x| > \cos 2\pi x \cdot |\cos 2\pi x|$ 的解集为 $\{x \mid k + \frac{1}{8} < x < k + \frac{5}{8}, k \in \mathbf{Z}\}$. 则正确结论的序号是

- A. ①②④ B. ①②③④ C. ②③ D. ①②③⑤

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 若向量 a, b 满足 $2|a| = |b|, a \perp (a+b)$, 则向量 a, b 的夹角为_____。

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - y + 3 \geq 0 \\ 2x + y - 5 \leq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$, 则 $z = |x - y|$ 的取值范围为_____。

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{xe^x} - mx, & x < 0 \\ \frac{e^x}{x} - mx, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 有且只有4个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是_____。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 = S_n^2 + 2S_n$, 其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设 $b_n = \frac{S_n}{n} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$, 则 b_{2n} 的最大值为_____。

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 且 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 。

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B}$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{4}$, $\triangle ABC$ 的外接圆的直径为1, 求 $\triangle ABC$ 的周长 L 。

18. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\left\{\frac{a_n^2}{n}\right\}$ 均为等差数列, $a_1 = \frac{1}{2}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

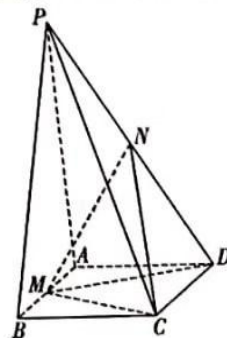
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = (-1)^n \cdot \frac{4a_n + 1}{n(n+1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

19. (12分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为2的正方形, M, N 分别是棱 AB, PD 的中点, $PA = PB, AD \perp PB$, 直线 MN 与平面 PAB 所成的角的正弦值为 $\frac{2}{3}$ 。

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 求二面角 $C-MN-D$ 的余弦值。



20. (12分)

“双十一”期间,某电商店铺A的活动为:全场商品每满60元返5元的优惠券(例如:买130元的商品,可用两张优惠券,只需付 $130 - 5 \times \left[\frac{130}{60} \right] = 130 - 5 \times 2 = 120$ (元).其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数).此外,在店铺优惠后,电商平台全场还提供每满400元减40元的优惠(例如:店铺A原价880元的一单,最终价格是 $880 - 5 \times 14 - 40 \times 2 = 730$ (元)),店铺优惠后不满400元则不能享受全场每满400元减40元的优惠活动.

- (1)小明打算在店铺A买一款250元的耳机和一款650元的音箱,是下两单(即耳机、音箱分两次购买)划算?还是下一单(即耳机、音箱一起购买)划算?
- (2)小明打算趁“双十一”囤积某生活日用品若干,预算不超过700元,该生活日用品在店铺A的售价为30元/件,试计算购买多少件该生活日用品平均价格最低?最低平均价格是多少?

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(ax) - ax^2 + x (a \neq 0)$.

- (1)讨论函数 $f(x)$ 的极值点个数;
- (2)若函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点 x_0 ,且 $f(x_0) \leq 0$,求实数 a 的取值集合.

请考生在第22、23两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.作答时用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑.

22. (10分) 选修4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中,直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = -1 - \frac{4}{5}t \\ y = 1 + \frac{3}{5}t \end{cases} (t \text{ 为参数}),$$
以直角坐标系的原点为极点,以 x

轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

- (1)求直线 l 的极坐标方程和曲线 C 的直角坐标方程;
- (2)已知直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点,试求 A, B 两点间的距离.

23. (10分) 选修4-5:不等式选讲

设函数 $f(x) = |2x - a| + |x + a| (a > 0)$.

- (1)当 $a = 2$ 时,求函数 $f(x)$ 的最小值;
- (2)若关于 x 的不等式 $f(x) < \frac{1}{x} + a$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上有解,求实数 a 的取值范围.

专注名校多元录取

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2020 届高三上学期期中考试试题及答案汇总 (更新下载中)，点击链接获得
<http://www.zizzs.com/c/201911/40242.html>