试卷类型：A

2022年潍坊市高中学科核心素养测评

高 三 数 学

2022.3

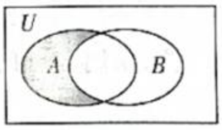
本试卷共4页．满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名．
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回．

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 如图，已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|(x+1)(x-2)>0\}$，则图中阴影部分表示的集合中，所包含元素的个数为



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. “$a>1,b>1$”是“$ab>1$”的

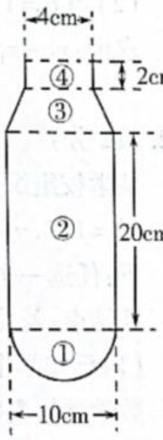
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-3,\ x\geq 10,\\ f(f(x+4)),x<10,\end{cases}$ 则 $f(8)=$

A. 10　　B. 9　　C. 7　　D. 6

4. 某品牌暖水瓶的内胆规格如图所示，分为①②③④四个部分（水瓶内胆壁厚不计），它们分别为一个半球，一个大圆柱，一个圆台和一个小圆柱．若其中圆台部分的体积为 $52\pi\text{cm}^3$，且水瓶灌满水后盖上瓶塞时水溢出 $\frac{10\pi}{3}\text{cm}^3$，则盖上瓶塞后水瓶的最大盛水量为



A. $640\pi\text{cm}^3$　　B. $\frac{1930\pi}{3}\text{cm}^3$

C. $320\pi\text{cm}^3$　　D. $\frac{965\pi}{3}\text{cm}^3$

5. 关于 x 的不等式 $|x+a|+|x+3|>a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,0]\cup(\frac{3}{2},+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,\frac{3}{2})$　　D. $(-\infty,2)$

6. $2^{50}-1$ 除以7的余数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 A，直线 $y=kx$ 交 E 于第一象限内的点 B，点 C 在 E 上，若四边形 $OABC$ 为平行四边形，则

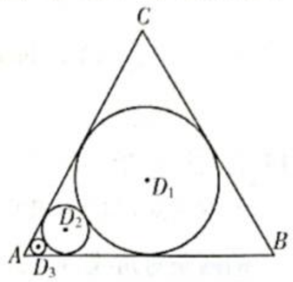
A. 若 k 越大，则 E 的长轴越长

B. 若 k 越大，则 E 越扁

C. 若 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 E 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. 若 $k=\sqrt{3}$，则 E 的离心率最大

8. 如图，在边长为 a 的等边三角形 ABC 中，圆 D_1 与 $\triangle ABC$ 相切，圆 D_2 与圆 D_1 相切且与 AB,AC 相切，…，圆 D_{n+1} 与圆 D_n 相切且与 AB,AC 相切，依次得到圆 $D_3,D_4,\cdots,D_n$. 设圆 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 的面积之和为 $X_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $X_n=$



A. $\frac{1}{12}\pi a^2(\frac{1}{9})^{n-1}$　　B. $\frac{3}{32}\pi a^2[1-(\frac{1}{9})^n]$

C. $\frac{1}{8}\pi a^2[1-(\frac{1}{3})^n]$　　D. $\frac{1}{12}\pi a^2[(\frac{1}{9})^{n-1}-(\frac{1}{3})^{n-1}+1]$

二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z 满足 $|z|=|z-1|=1$，且复数 z 对应的点在第一象限，则下列结论正确的是

A. 复数 z 的虚部为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

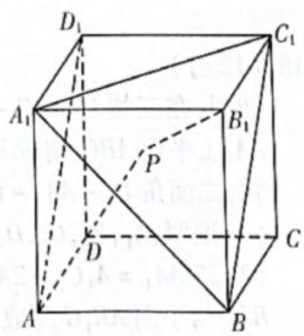
C. $z^2=z-1$　　D. 复数 z 的共轭复数为 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

10. 已知事件 A,B 满足 $A\subseteq B$，且 $P(B)=0.5$，则一定有

A. $P(\overline{A}B)>0.5$　　B. $P(\overline{B}|A)<0.5$

C. $P(A\overline{B})<0.25$　　D. $P(A|B)>0.5$

11. 如图，在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是平面 A_1BC_1 内一个动点，且满足 $PD+PB_1=2+\sqrt{13}$，则下列结论正确的是



A. $B_1D\perp PB$

B. 点 P 的轨迹是一个半径为 $\sqrt{2}$ 的圆

C. 直线 B_1P 与平面 A_1BC_1 所成角为 $\frac{\pi}{3}$

D. 三棱锥 $P-BB_1C_1$ 体积的最大值为 $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$

12. 我们约定双曲线 $E_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与双曲线 $E_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(0<\lambda<1)$ 为相似双曲线，其中相似比为 λ. 则下列说法正确的是

A. E_1,E_2 的离心率相同，渐近线也相同

B. 以 E_1,E_2 的实轴为直径的圆的面积分别记为 S_1,S_2，则 $\frac{S_1}{S_2}=\lambda$

C. 过 E_1 上的任一点 P 引 E_1 的切线交 E_2 于点 A,B，则点 P 为线段 AB 的中点

D. 斜率为 $k(k>0)$ 的直线与 E_1,E_2 的右支由上到下依次交于点 A,B,C,D，则 $|AC|>|BD|$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，点 P 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=$ ________.

14. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}]$ 上单调递增，则 ω 的一个取值为 ________.

15. 古希腊数学家托勒密在他的名著《数学汇编》里给出了托勒密定理，即圆的内接凸四边形的两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积. 已知 AC,BD 为圆的内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线，$\sin\angle CBD:\sin\angle BDC:\sin\angle BAD=1:1:\sqrt{3}$，$AC=4$，则 $\triangle ABD$ 面积的最大值为 ________.

16. 设函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+a(x-1)+b(a,b\in\mathbf{R})$ 在区间 $[1,3]$ 上总存在零点，则 a^2+b^2 的最小值为________.

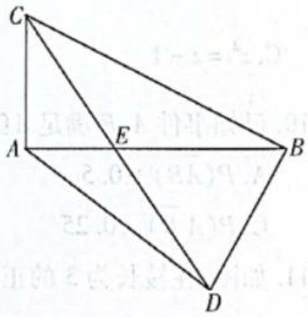
四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)}{4}$.

(1) 求 $\angle C$；

(2) 若 $\angle A=\frac{\pi}{2}$，$\angle C$ 的角平分线 CE 与边 AB 相交于点 E，延长 CE 至点 D，使得 $CE=DE$，求 $\cos\angle ADB$.

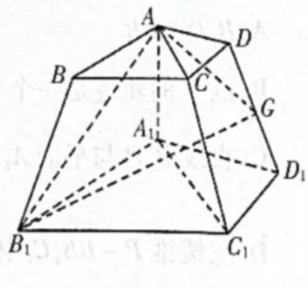


18. (12 分)

如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$AA_1\perp$ 平面 ABC，将梯形 AA_1C_1C 绕 AA_1 旋转至 AA_1D_1D 位置，二面角 $D_1-AA_1-C_1$ 的大小为 30°.

(1) 证明：A_1,B_1,C_1,D_1 四点共面，且 $A_1D_1\perp$ 平面 ABB_1A_1；

(2) 若 $AA_1=A_1C_1=2AB=4$，设 G 为 DD_1 的中点，求直线 BB_1 与平面 AB_1G 所成角的正弦值.



19. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(0,\frac{1}{8})$，点 P 到点 M 的距离比点 P 到 x 轴的距离大 $\frac{1}{8}$，记 P 的轨迹为 C.

(1) 求 C 的方程；

(2) 过点 $P(x_0,y_0)$（其中 $x_0\neq0$）的两条直线分别交 C 于 E,F 两点，直线 PE,PF 分别交 y 轴于 A,B 两点，且满足 $|PA|=|PB|$. 记 k_1 为直线 EF 的斜率，k_2 为 C 在点 P 处的切线斜率，判断 k_1+k_2 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，说明理由.

20. (12 分)

已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列，$a_1=b_1=1$，$a_3=a_1+a_2$，$b_5=b_4+a_2$，记 $c_n=\max\{b_1-na_1,b_2-na_2,\cdots,b_n-na_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 这 s 个数中最大的数.

(1) 计算 c_1,c_2,c_3，猜想数列 $\{c_n\}$ 的通项公式并证明；

(2) 设数列 $\{\frac{1}{(3-c_n)(2-c_n)}\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n<-m^2+4m$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求偶数 m 的值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-x+\frac{1}{x}(a>0)$.

(1) 当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)\leqslant0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 当 $a=1$ 时，$g(x)=xf(x)+x^2-1$，方程 $g(x)=m$ 的根为 x_1,x_2，且 $x_2>x_1$，求证：$x_2-x_1>1+em$.

22. (12 分)

某学校组织数学，物理学科答题竞赛活动，该学校准备了 100 个相同的箱子，其中第 k $(k=1,2,\cdots,100)$ 个箱子中有 k 个数学题，$100-k$ 个物理题. 每一轮竞赛活动规则如下：任选一个箱子，依次抽取三个题目（每次取出不放回），并全部作答完毕，则该轮活动结束；若此轮活动中，三个题目全部答对获得一个奖品.

(1) 已知学生甲在每一轮活动中，都抽中了 2 个数学题，1 个物理题，且甲答对每一个数学题的概率为 p，答对每一个物理题的概率为 q.

①求学生甲第一轮活动获得一个奖品的概率；

②已知 $p+q=1$，学生甲理论上至少要进行多少轮活动才能获得四个奖品？并求此时 p,q 的值.

(2) 若学生乙只参加一轮活动，求乙第三次抽到物理题的概率.

2022 年潍坊市高中学科核心素养测评

高三数学试题参考答案及评分标准

2022.3

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1－5 BACAC　　6－8 DCB

二、多项选择题(每小题 5 分,共 20 分)

9. BC　　10. BC　　11. ACD　　12. AC

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 16　　14. (0,2]中任一个数均可　　15. $3\sqrt{3}$　　16. $\frac{e^4}{8}$

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

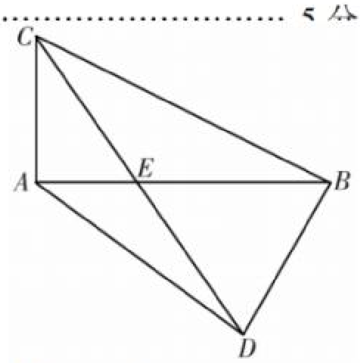
17. 解:(1)由题可知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)}{4}$, …………………………… 2 分

所以$\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)=2ab\sin C$,

由余弦定理 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$,

所以 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$,

$C\in(0,\pi)$,所以$\angle C=\frac{\pi}{3}$; …………………………………………………………… 5 分



(2)如图,不妨令 $AC=3$,因为$\angle C=\frac{\pi}{3}$,

可得 $AB=3\sqrt{3}$,$BC=6$,

又因为 CE 为$\angle ACB$ 的角平分线,

所以 $AE=\sqrt{3}$,$BE=CE=2\sqrt{3}$,得 $DE=2\sqrt{3}$,

所以在$\triangle ADC$ 中,由余弦定理可得 $AD^2=CA^2+CD^2-2CA\times CD\times\cos 30°$,

即 $AD=\sqrt{21}$, …………………………………………………………………………… 8 分

在$\triangle EDB$ 中,可得 $ED=BE=2\sqrt{3}$,$\angle BDE=60°$,

所以 $BD=2\sqrt{3}$,

在$\triangle ADB$ 中,由余弦定理可得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\times BD\times\cos\angle ADB$,

得 $\cos\angle ADB=\frac{\sqrt{7}}{14}$. …………………………………………………………………… 10 分

18. (1)证明:因为 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$,

所以 $AA_1\perp A_1C_1$,

又因为 $AA_1\perp A_1D_1$,$A_1D_1\cap A_1C_1=A_1$,

所以 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1D_1$, ………………………………………… 1 分

假设 A_1,B_1,C_1,D_1 四点不共面,

因为 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$,$AA_1\perp$平面 $A_1B_1D_1$,

所以平面 $A_1B_1C_1$ // 平面 $A_1B_1D_1$,

与平面 $A_1B_1C_1\cap$平面 $A_1B_1D_1=A_1B_1$ 矛盾,

故 A_1,B_1,C_1,D_1 四点共面, ………………………………………… 3 分

又因为 $A_1C_1\perp A_1A_1$,$A_1D_1\perp AA_1$,

所以 $\angle C_1A_1D_1$ 二面角 $D_1-AA_1-C_1$ 的平面角, ……………………… 4 分

所以 $\angle C_1A_1D_1=30°$,

又 $\angle B_1A_1C_1=60°$,

所以 $A_1D_1\perp A_1B_1$; ………………………………………………… 5 分

又 $AA_1\perp A_1D_1$,

$AA_1\cap A_1B_1=A_1$,

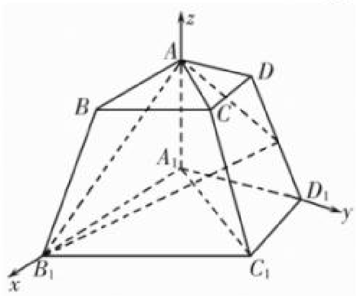
所以 $A_1D_1\perp$平面 ABB_1A_1; ………………………………………… 6 分

(2)以 A_1 为坐标原点,$\overrightarrow{A_1B_1}$,$\overrightarrow{A_1D_1}$,$\overrightarrow{AA_1}$的方向为 x,y,z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 A_1-xyz;

则 $A(0,0,4)$,$B(2,0,4)$,$C(1,\sqrt{3},4)$,$D(0,2,4)$,

$A_1(0,0,0)$,$B_1(4,0,0)$,$C_1(2,2\sqrt{3},0)$,$D_1(0,4,0)$,所以 $G(0,3,2)$,

则$\overrightarrow{AB_1}=(4,0,-4)$,$\overrightarrow{BB_1}=(2,0,-4)$,$\overrightarrow{AG}=(0,3,-2)$, ……………………… 8 分



设平面 AB_1G 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}4x-4z=0,\\ 3y-2z=0,\end{cases}$

令 $x=3$,得 $\boldsymbol{n}=(3,2,3)$, ……………………… 10 分

设 BB_1 与平面 AB_1G 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BB_1},\boldsymbol{n}>|=|\dfrac{\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BB_1}||\boldsymbol{n}|}|=\dfrac{6}{\sqrt{22}\times\sqrt{20}}=\dfrac{3\sqrt{110}}{110}$.

所以 BB_1 与平面 AB_1G 所成角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{110}}{110}$. ……………………… 12 分

19. 解:(1)由题可知,点 P 到点 $M(0,\frac{1}{8})$ 的距离与 P 到直线 $y+\frac{1}{8}=0$ 的距离相等,

轨迹一:点 P 的轨迹是以 $M(0,\frac{1}{8})$ 为焦点,直线 $y+\frac{1}{8}=0$ 为准线的抛物线,此时 $p=\frac{1}{4}$,所以 C 的方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$. …………………………………………………… 3 分

轨迹二:点 P 的轨迹在 y 轴上,$x=0(y\leqslant 0)$,

综上所述,C 的方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$ 或 $x=0(y\leqslant 0)$. ………………………………… 5 分

(2)当直线 PE、PF 不是切线时,

因为 $|PA|=|PB|$,所以 $\triangle PAB$ 为等腰三角形,即直线 PE 与 PF 的斜率存在且互为相反数,即 $k_{PE}+k_{PF}=0$. …………………………………………………………………… 6 分

设点 $E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,直线 PE 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,

联立直线 PE 与抛物线方程,消去 y 并整理得

$2x^2-kx+kx_0-y_0=0$,

于是 $x_1+x_0=\frac{k}{2}$,故 $x_1=\frac{k}{2}-x_0$,

因为直线 PE 与 PF 的斜率互为相反数,令 $-k$ 代替 k,得 $x_2=-\frac{k}{2}-x_0$,………… 8 分

所以 $k_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2{x_1}^2-2{x_2}^2}{x_1-x_2}=2(x_1+x_2)=-4x_0$,

又 $y'=4x$,所以 $k_2=4x_0$,

即 $k_1+k_2=0$,……………………………………………………………………………… 10 分

当 PE 与 PF 有一条为切线,则 P 为切点,不妨设 PF 为切线,所以点 F 与点 B 重合,

因 $|PA|=|PB|$,所以 $\angle PAB=\angle PBA$,

若 $k_1+k_2=0$,则 $\angle PBA=\angle EBA$,

所以 $\angle PAB=\angle EBA$,即 $PE/\!/BE$ 矛盾,

综上所述,k_1+k_2 不为定值. …………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 等差数列的公差为 d_1、d_2,那么

$\begin{cases}1+2d_1=1+(1+d_1),\\1+4d_2=(1+3d_2)+(1+d_1),\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}d_1=1\\d_2=2\end{cases}$,$\therefore\ a_n=n,b_n=2n-1$,……………… 2 分

那么,$c_1=b_1-a_1=1-1=0$,$c_2=\max\{b_1-2a_1,b_2-2a_2\}=\max\{1-2\times1,3-2\times2\}=-1$,$c_3=\max\{b_1-3a_1,b_2-3a_2,b_3-3a_3\}=\max\{1-3\times1,3-3\times2,5-3\times3\}=-2$.

猜想 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n=1-n$, …………………………………………………… 5 分

当 $n\geqslant 3$ 时,$(b_{k+1}-na_{k+1})-(b_k-na_k)=(b_{k+1}-b_k)-n(a_{k+1}-a_k)=2-n<0$,

所以数列 $\{b_k-na_k\}$ 关于 $k\in\mathbf{N}^*$ 单调递减.

所以 $c_n=\max\{b_1-na_1,b_2-na_2,\cdots,b_n-na_n\}=b_1-na_1=1-n$. ………………… 7 分

(2) $\frac{1}{(3-c_n)(2-c_n)}=\frac{1}{[3-(1-n)][2-(1-n)]}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$,

·· 8 分

所以 $S_n=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$, ·············· 10 分

由题意得 $-m^2+4m\geqslant\frac{1}{2}$,解得 $\frac{4-\sqrt{14}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{4+\sqrt{14}}{2}$,故 $m=2$. ················ 12 分

21. 解:(1) $f'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$, ··· 1 分

设 $y=-x^2+ax-1$,则 $\Delta=a^2-4$,

(ⅰ)当 $0<a\leqslant 2$ 时,$\Delta\leqslant 0$,$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数,

又因为 $f(1)=0$,所以 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立. ··· 3 分

(ⅱ)当 $a>2$ 时,$\Delta>0$,方程 $-x^2+ax-1=0$ 的根为 $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$,

又因为 $x_1x_2=1$,所以 $x_1<1<x_2$. 由 $f'(x)>0$ 得 $1\leqslant x<\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$,由 $f'(x)<0$,

得 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$,

所以 $f(x)$ 在 $[1,\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2})$ 上是增函数,在 $(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上是减函数,

因为 $f(1)=0$,所以 $f(x)\leqslant 0$ 不恒成立.

所以 $0<a\leqslant 2$. ·· 6 分

(2) $g(x)=x\ln x$,$g'(x)=1+\ln x$,所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上是减函数,在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上是增函数,

当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时,$\ln x<-1$,所以 $x\ln x<-x$,即 $g(x)<-x$.

设直线 $y=-x$ 与 $y=m$ 的交点的横坐标为 x_3,则 $x_1<x_3=-m$, ···················· 8 分

下面证明当 $x\in(\frac{1}{e},1)$ 时,$g(x)<\frac{1}{e-1}(x-1)$,设 $h(x)=x\ln x-\frac{1}{e-1}(x-1)=x(\ln x-\frac{1}{e-1}+\frac{1}{(e-1)x})$,$m(x)=\ln x-\frac{1}{e-1}+\frac{1}{(e-1)x}$,则 $m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(e-1)x^2}=\frac{(e-1)x-1}{(e-1)x^2}$,所以 $m(x)$ 在 $(\frac{1}{e},\frac{1}{e-1})$ 上是减函数,在 $(\frac{1}{e-1},1)$ 上是增函数,又因为

$m(\frac{1}{e})=0, m(1)=0$，所以 $m(x)<0, h(x)<0$，

故当 $x\in(\frac{1}{e},1)$ 时，$g(x)<\frac{1}{e-1}(x-1)$. ······ 10 分

设直线 $y=\frac{1}{e-1}(x-1)$ 与 $y=m$ 的交点的横坐标为 x_4，则 $x_2>x_4=1+(e-1)m$，

所以 $x_2-x_1>x_4-x_3=1+em$，得证. ······ 12 分

22. (1)①记“学生甲第一轮活动获得一个奖品”为事件 A. 则

$P(A)=p^2q$. ······ 3 分

②学生甲在每一轮活动中获得一个奖品的概率为

$P=p^2q=p^2(1-p)=-p^3+p^2$，

令 $y=-x^3+x^2, x\in[0,1], y'=-3x^2+2x=-3x(x-\frac{2}{3})$，

所以 y 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 上单调递增，在 $[\frac{2}{3},1]$ 上单调递减，故 $x=\frac{2}{3}$ 时 y 取得最大值，

即 $p=\frac{2}{3}$ 时，$P_{\max}=-(\frac{2}{3})^3+(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{27}$. ······ 6 分

学生甲在 n 轮活动中获得奖品的个数 $\xi\sim B(n,P)$.

由 $(nP)_{\max}=4$，知 $n=27$.

故理论上至少要进行 27 轮游戏，此时 $p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}$. ······ 8 分

(2)设选出的是第 k 个箱子，连续三次取出题目的方法数为 $100(100-1)(100-2)$.

设数学题为 M，物理题为 W，第三次取出的是物理题 W 有如下四种情形：

(W,W,W) 取法数为 $(100-k)(100-k-1)(100-k-2)$，

(W,M,W) 取法数为 $k(100-k)(100-k-1)$，

(M,W,W) 取法数为 $k(100-k)(100-k-1)$，

(M,M,W) 取法数为 $k(k-1)(100-k)$.

从而，第三次取出的是物理题的种数为

$(100-k)(100-k-1)(100-k-2)+k(100-k)(100-k-1)+k(100-k)(100-k-1)+k(k-1)(100-k)$

$=(100-1)(100-2)(100-k)$.

则在第 k 个箱子中第三次取出的是物理题的概率为 $p_k=\frac{100-k}{100}$. ······ 10 分

而选到第 k 个箱子的概率为 $\frac{1}{100}$，故所求的概率为

$$P=\sum_{k=1}^{100}P_k\cdot\frac{1}{100}=\sum_{k=1}^{100}\frac{100-k}{100}\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{100^2}\sum_{k=1}^{100}(100-k)=\frac{1}{100^2}\sum_{i=0}^{99}i=\frac{99}{200}.\quad\cdots\ 12\text{ 分}$$