

绝密★启用前 【考试时间：2020年4月24日下午15:00~17:00】

湖南湖北四校 2020 届高三学情调研联考

文科数学试题卷

本试卷共 5 页，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

考生注意：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝考试顺利！

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

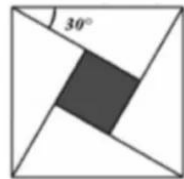
1. 已知集合 $P = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 4\}$, $Q = \{x \in \mathbb{R} | |x| < 3\}$, 则 $P \cup Q =$

- A. $[3, 4]$ B. $(-3, 4]$ C. $(-\infty, 4]$ D. $(-3, +\infty)$

2. x, y 互为共轭复数，且 $(x+y)^2 - 3xyi = 4 - 6i$ 则 $|x| + |y| =$

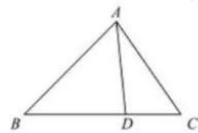
- A. 2 B. 1 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

3. 如图所示，三国时代数学家在《周髀算经》中利用弦图，给出了勾股定理的绝妙证明。图中包含四个全等的直角三角形及一个小正方形（阴影），设直角三角形有一个内角为 30° ，若向弦图内随机抛掷 200 颗米粒（大小忽略不计，取 $\sqrt{3} \approx 1.732$ ），则落在小正方形（阴影）内的米粒数大约为



- A. 20 B. 27 C. 54 D. 64

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在线段 BC 上，且 $BD = 3DC$ ，若 $\vec{AD} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ ，则 $\frac{\lambda}{\mu} =$



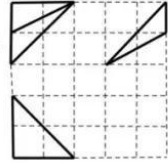
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 2

5. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数，记

$a = f(\log_{0.5} 3), b = f(\log_2 5), c = f(2+m)$ 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

6. 如图所示是某多面体的三视图，左上为正视图，右上为侧视图，左下为俯视图，且图中小方格单位长度为1，则该多面体的侧面最大面积为

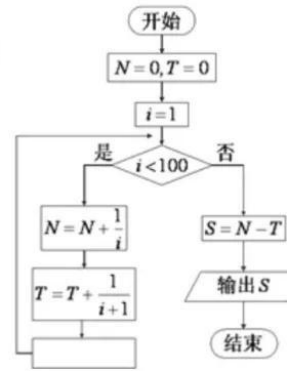


- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 又点 $N(-c, \frac{3b^2}{2a})$. 若双曲线 C 左支上的任意一点 M 均满足 $|MF_2| + |MN| > 4b$, 则双曲线 C 的离心率的取值范围为

- A. $(\frac{\sqrt{13}}{3}, \sqrt{5})$ B. $(1, \frac{\sqrt{13}}{3}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
C. $(1, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{13}, +\infty)$ D. $(\sqrt{5}, \sqrt{13})$

8. 为计算 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$, 设计了下面的程序框图, 则在空白框中应填入



- A. $i = i + 1$ B. $i = i + 2$
C. $i = i + 3$ D. $i = i + 4$

9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且

$$a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c, \text{ 则 } \tan(A - B) \text{ 的最大值为}$$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\sqrt{3}$

10. 已知函数 $f(x) = 2 \sin \omega x \cdot \cos^2(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{4}) - \sin^2 \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上是增函数, 且在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值 1, 则 ω 的取值范围是

- A. $(0, \frac{3}{5}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

11. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点 F 的直线交两渐近线于 A, B 两点, 若 $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 0$, O 为坐标原点, 且 $\triangle OAB$ 内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$, 则该双曲线的离心率为

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}+1$

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$, 则球 O 的体积为

- A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 = x_0 - 1$ ”的否定是_____.

14. 观察分析下表中的数据：

多面体	面积 (F)	顶点数 (V)	棱数 (E)
三棱柱	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12

猜想一般凸多面体中 F, V, E 所满足的等式是_____.

15. 设函数 $f(x) = e^x(x-1)$, 函数 $g(x) = mx$, 若对于任意的 $x_1 \in [-2, 2]$, 总存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围是_____.

16. 某小商品生产厂家计划每天生产 A 型、B 型、C 型三种小商品共 100 个, 生产一个 A 型小商品需 5 分钟, 生产一个 B 型小商品需 7 分钟, 生产一个 C 型小商品需 4 分钟, 已知总生产时间不超过 10 小时. 若生产一个 A 型小商品可获利润 8 元, 生产一个 B 型小商品可获利润 9 元, 生产一个 C 型小商品可获利润 6 元. 该厂家合理分配生产任务使每天的利润最大, 则最大日利润是_____元.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：60 分。

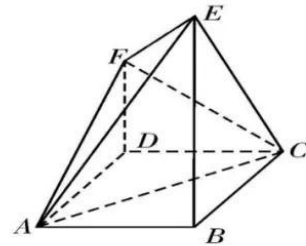
17. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足： $a_1 = \frac{1}{4}, a_n + b_n = 1, b_{n+1} = \frac{b_n}{1-a_n^2}$.

(1) 证明： $\left\{\frac{1}{b_n-1}\right\}$ 是等差数列，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_na_{n+1}$, 求实数 a 为何值时 $4aS_n < b_n$ 恒成立

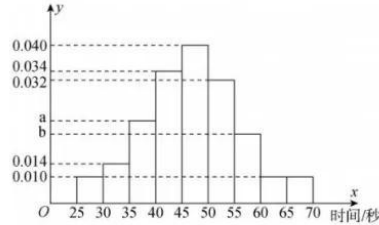
18. 如图, $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = 60^\circ, EB \perp$ 平面 $ABCD, FD \perp$ 平面 $ABCD, EB = 2FD = 4$.

- (1) 求证： $EF \perp AC$;
(2) 求几何体 $EFABCD$ 的体积.



19.

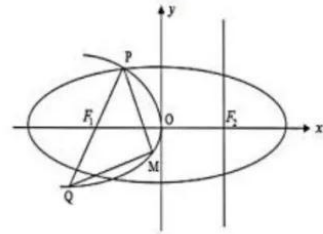
在“挑战不可能”的电视节目上,甲、乙、丙三个人组成的解密团队参加一项解密挑战活动,规则是由密码专家给出题目,然后由3个人依次出场解密,每人限定时间是1分钟内,否则派下一个人.3个人中只要有一人解密正确,则认为该团队挑战成功,否则挑战失败.根据甲以往解密测试情况,抽取了甲100次的测试记录,绘制了如下的频率分布直方图.



- (1)若甲解密成功所需时间的中位数为47,求 a, b 的值,并求出甲在1分钟内解密成功的频率;
 (2)在“挑战不可能”节目上由于来自各方及自身的心理压力,甲,乙,丙解密成功的概率分别为 $P_n = P_1 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{10} (n=1, 2, 3)$,其中 P_i 表示第 i 个出场选手解密成功的概率,并且 P_1 定义为甲抽样中解密成功的频率代替,各人是否解密成功相互独立.
 ①求该团队挑战成功的概率;
 ②该团队以 P_i 从小到大的顺序按排甲、乙、丙三个人上场解密,求团队挑战成功所需派出的人数 X 的可能值及其概率.

20. 如图,设抛物线 $C_1: y^2 = -4mx (m > 0)$ 的准线 l 与 x 轴交于椭圆

$C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F_2, F_1 为 C_2 的左焦点.椭圆的离心率为 $e = \frac{1}{2}$,抛物线 C_1 与椭圆 C_2 交于 x 轴上方一点 P ,连接 PF_1 并延长其交 C_1 于点 Q , M 为 C_1 上一动点,且在 P, Q 之间移动.



- (1) 当 $\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{b}$ 取最小值时,求 C_1 和 C_2 的方程;
 (2) 若 $\triangle PF_1F_2$ 的边长恰好是三个连续的自然数,当 $\triangle MPQ$ 面积取最大值时,求面积最大值以及此时直线 MP 的方程.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e} + a \ln x$, 其中 a 为常数.

(1) 若直线 $y = \frac{2}{e}x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条切线, 求实数 a 的值;

(2) 当 $a = -1$ 时, 若函数 $g(x) = |f(x)| - \frac{\ln x}{x} + b$ 在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点. 求实数 b 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 - t, \\ y = 1 + t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 $C_1: y = \sqrt{1 - x^2}$. 以

坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 若直线 l 与 x, y 轴的交点分别为 A, B , 点 P 在 C_1 上, 求 $\overline{BA} \cdot \overline{BP}$ 的取值范围;

(2) 若直线 l 与 C_2 交于 M, N 两点, 点 Q 的直角坐标为 $(-2, 1)$, 求 $\|QM\| - \|QN\|$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |2x| + |2x + 3| + m, m \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $m = -2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 3$ 的解集;

(2) 若 $\forall x \in (-\infty, 0)$, 都有 $f(x) \geq x + \frac{2}{x}$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年，是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站(www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html>