江苏省南通市2022-2023学年高三上学期期末调研测试

数学试题

一、选择题.本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合M满足$\complement_U M=\{1,3,5\}$，则

A．$2\notin M$　　B．$3\in M$　　C．$4\in M$　　D．$6\notin M$

【答案】C

【解析】因为$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\complement_U M=\{1,3,5\}$，所以$M=\{2,4,6\}$，所以元素2与集合$M$的关系为$2\in M$，A错误，元素3与集合$M$的关系为$3\notin M$，B错误，元素4与集合$M$的关系为$4\in M$，C正确，元素6与集合$M$的关系为$6\in M$，D错误，故选：C.

2．已知复数z满足$\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$（i为虚数单位），则复数z的虚部为

A．i　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．-1

【答案】D

【解析】$\because \mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$，$\therefore z=\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=1-\mathrm{i}$，$\therefore$复数$z$的虚部为$-1$.故选：D.

3．在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，则$\overrightarrow{CB}=$

A．$\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$　B．$\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$　C．$3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}$　D．$3\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CA}$

【答案】A

【解析】因为$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，则$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$，因此，$\overrightarrow{CB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

故选：A.

4．将一个圆形纸片剪成两个扇形（没有多余角料），将它们分别卷曲粘贴成圆锥形状（重叠部分忽略不计），若两个扇形的面积比为$1:2$，则两圆锥的高之比为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{6\sqrt{2}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　D．$\frac{6}{5}$

【答案】C

【解析】设圆的半径为r，则两个圆锥的母线长为r.

因为$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}l_1r}{\frac{1}{2}l_2r}=\frac{l_1}{l_2}$，又因两个扇形的面积比为$1:2$，则两个扇形的弧长比也为$1:2$.

设卷成的两个圆锥小圆锥底面半径为r_1，高为h_1，大圆锥底面半径为r_2，高为h_2，

则$2\pi r\times\frac{1}{3}=2\pi r_1$，$r_1=\frac{1}{3}r$，$2\pi r\times\frac{2}{3}=2\pi r_2$，$r_2=\frac{2}{3}r$，

则$h_1=\sqrt{r^2-r_1^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}r$，$h_2=\sqrt{r^2-r_2^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}r$，

所以两个圆锥的高分别为$h_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}r$，$h_2=\frac{\sqrt{5}}{3}r$，因此两圆锥的高之比为$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

故选C.

5．已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边上有两点$A(1,a),B(2,b)$，且$|a-b|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则$\cos2\alpha=$

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．1

【答案】B

【解析】由题意可知：点O,A,B三点共线，所以$\frac{a}{1}=\frac{b}{2}$，即$b=2a$，

因为$|a-b|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$|a|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$，

由二倍角公式可得：$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{5}{6}-1=\frac{2}{3}$，故选：B.

6．设k为实数，若双曲线$7kx^2-ky^2=7$的一个焦点坐标为$(0,-5)$，则k的值为

A．$-\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$-\frac{8}{25}$　　D．$\frac{8}{25}$

【答案】C

【解析】将双曲线$7kx^2-ky^2=7$化为标准方程，得$\frac{x^2}{\frac{1}{k}}-\frac{y^2}{\frac{7}{k}}=1$，

因为双曲线$7kx^2-ky^2=7$的一个焦点坐标为$(0,-5)$，在y轴上，所以$k<0$，

且$\frac{1}{-k}+\frac{7}{-k}=25$，解得$k=-\frac{8}{25}$.故选：C.

7．某同学研究如下数表时，发现其特点是每行每列都成等差数列，在表中，数41出现的次数为

2	3	4	5	6	$\cdots$
3	5	7	9	11	$\cdots$
4	7	10	13	16	$\cdots$
5	9	13	17	21	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

A．8　　B．9　　C．10　　D．11

【答案】A

【解析】记第i行第j列的数为A_{ij}，由题意可知第一行组成的数列$A_{1j}(j=1,2,\cdots)$是以2为首项，1为公差的数列，所以$A_{1j}=2+(j-1)\times 1=j+1$，所以第$j$列数组成的数列$A_{ij}(i=1,2,\cdots)$是以$j+1$为首项，公差为$j$的等差数列，所以$A_{ij}=(j+1)+(i-1)\times j=ij+1$，令$A_{ij}=ij+1=41$，所以$ij=40$，解得$i=1,j=40$；$i=2,j=20$；$i=4,j=10$；$i=5,j=8$；$i=8,j=5$；$i=10,j=4$；$i=20,j=2$；$i=40,j=1$，共8组解，所以数41出现共出现8次.故选：A.

8．已知函数$f(x)=(x-1)e^x+m\left(x\ln x+\frac{1}{2}x^2-x\right)$存在极大值点和极小值点，则实数$m$的值可以是

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$-\frac{5}{2}$　　D．$-\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】由已知 $f(x)=(x-1)e^{x}+m\left(x\ln x+\frac{1}{2}x^{2}-x\right)$ 存在极大值点和极小值点

可得 $f'(x)=xe^{x}+m(\ln x+1+x-1)=xe^{x}+m(\ln x+x)=0$ 有两个根，可得 $m<0$.

当 $m\geq 0$ 时，$f'(x)=xe^{x}+m(\ln x+x)$ 单调递增，$f'(x)=0$ 至多一个根，不合题意.

$f''(x)=(x+1)e^{x}+m\left(\frac{1}{x}+1\right)=(x+1)e^{x}+m\left(\frac{1+x}{x}\right)=(x+1)\left(e^{x}+\frac{m}{x}\right)$，

因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $x+1>0$，所以 $f''(x),e^{x}+\frac{m}{x}$ 同号，$t(x)=e^{x}+\frac{m}{x}$ 单调递增，因为 $f'(x)=0$ 有两个根，则存在 x_0，$t(x_0)=e^{x_0}+\frac{m}{x_0}=0$.

$f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是单调递减的，$f'(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增的，$f'(x)=0$ 有两个根.

又因 $x\to 0,f'(x)\to+\infty$；$x\to+\infty,f'(x)\to+\infty$，

则 $f'(x_0)<0,f'(x_0)=x_0e^{x_0}+m(\ln x_0+x_0)$，又因 $e^{x_0}+\frac{m}{x_0}=0$，$-m=x_0e^{x_0}$，

所以 $f'(x_0)=x_0e^{x_0}+m(\ln x_0+x_0)=x_0e^{x_0}(1-\ln x_0-x_0)<0$，即得 $\ln x_0+x_0-1>0$，

因为 $m(x)=\ln x+x-1$ 单调递增，$m(1)=0$，所以 $x_0>1$.

满足 $t(x_0)=e^{x_0}+\frac{m}{x_0}=0$，则 $e^{x_0}+\frac{m}{x_0}=0$，$-m=x_0e^{x_0}$，令 $h(x)=xe^{x}$，

则 $h'(x)=(x+1)e^{x}>0,h(x)$ 是单调递增的，所以 $h(x)>h(1)$，所以 $-m>e$，所以 $m<-e$，

D 选项满足要求，故选：D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=-n^2+13n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列说法正确的是

A．$\{a_n\}$ 为等差数列　　B．$a_1=13$

C．S_n 中，S_6、S_7 最大　　D．$\{a_n\}$ 为递增数列

【答案】BC

【解析】对 A，$\because S_n=-n^2+13n+1$，$\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+13n+1-[-(n-1)^2+13(n-1)+1]=-2n+14$ ，

当 $n=1$ 时，$a_1=13$ 不满足上式，$\therefore a_n=\begin{cases}13, n=1,\\-2n+14, n\geq 2\end{cases}$，从而知 $\{a_n\}$ 不是等差数列，故 A 选项错误；

对 B，$\because S_n=-n^2+13n+1$，$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=13$，故 B 选项正确；

对 C，$\because S_n=-n^2+13n+1$，$\therefore$ 当 $n=\dfrac{13}{2}=6.5$ 时，$S_n=-n^2+13n+1$ 有最大值，而又 $n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore$ 当 $n=6$ 或 $n=7$ 时，$S_n=-n^2+13n+1$ 有最大值，即在 S_n 中，S_6,S_7 最大，故 C 选项正确；

对 D，由 $S_n=-n^2+13n+1$ 知 $a_n=\begin{cases}13, n=1\\-2n+14, n\geq 2\end{cases}$，$\therefore$ 根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式知此数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 D 选项错误.故选：BC.

10．已知函数 $f(x)=\sin x-a\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的最大值为 2，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，则下列结论正确的是

A．$a=\sqrt{3}$

B．$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递减

C．直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

D．把 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到的图象关于点 $\left(\dfrac{7\pi}{12},0\right)$ 对称

【答案】BCD

【解析】 因为函数 $f(x)=\sin x-a\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的最大值为 2，所以 $\sqrt{1+a^2}=2$，解得 $a=\pm\sqrt{3}$，因为 $f'(x)=\cos x+a\sin x$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a<0$，所以 $a=-\sqrt{3}$，故 A 选项错误；

所以 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，对于 B 选项，当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$ 时，

$x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，由于函数 $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以，函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递减，故 B 选项正确；

对于 C 选项，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，由于 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\sin x$ 的对称轴，

所以直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故 C 选项正确；

对于 D 选项，把 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$，所以令 $x+\frac{5\pi}{12}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故当 $k=1$ 时，$x=\frac{7\pi}{12}$，所以 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$ 是 $y=2\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$ 的一个对称中心，故 D 选项正确.

故选：BCD.

11．已知 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是圆 $O:x^2+y^2=1$ 上两点，则下列结论正确的是

A．若点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{1}{2}$，则 $|AB|=\sqrt{3}$

B．若 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$

C．若 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，则点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D．$|x_1+y_1-1|$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$，最小值为 $\sqrt{2}-1$

【答案】AC

【解析】对于 A：易知圆 $O:x^2+y^2=1$ 的半径 $r=1$，因为点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{2}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$，即选项 A 正确；

对于 B：因为 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

即$\frac{1}{2}\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{4}$，解得$\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$0<\angle AOB<\pi$，

所以$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$或$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，即选项 B 错误；

对于 C：因为$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$，即$|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\frac{1}{2}$，

即$\cos\angle AOB=\frac{1}{2}$，因为$0<\angle AOB<\pi$，所以$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，

即$\triangle AOB$是边长为1的等边三角形，所以点O到直线AB的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，即选项 C 正确；

对于 D：由题意设$x_1=\cos\theta$，$y_1=\sin\theta$，且$0\le\theta\le2\pi$，

则$|x_1+y_1-1|=|\cos\theta+\sin\theta-1|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|$，因为$0\le\theta\le2\pi$，

所以$\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4}$，则$-1\le\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le1$，$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$，

$-\sqrt{2}-1\le\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1\le\sqrt{2}-1$，所以$0\le\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|\le\sqrt{2}+1$，

即$0\le|x_1+y_1-1|\le\sqrt{2}+1$，即选项 D 错误.故选：AC.

12．已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$，$f(2x-1)+f(3-2x)=f(-2)$，$g(1-x)+g(-3x)=g\left(-\frac{1}{2}\right)$，则

A．$f(4)=0$　　B．$g(2)=g(-1)$　C．$g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　D．$g(2022)=g(0)$

【答案】ACD

【解析】$\because f(2x-1)+f(3-2x)=f(-2)$，令$x=-\frac{1}{2}$，得$f(-2)+f(4)=f(-2)$，

$\therefore f(4)=0$，所以 A 正确.

令$t=2x-1$，则$f(t)+f(2-t)=f(-2)$，求导数得，$f'(t)-f'(2-t)=0$，

即$g(t)=g(2-t)$，所以$g(x)$关于$x=1$对称，$\therefore g(1-x)=g(1+x)$，

又因为$\begin{cases} g(1-x)+g(-3x)=g\left(-\frac{1}{2}\right) \\ g(1+x)+g(3x)=g\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$，$\therefore g(-3x)=g(3x)$，所以$g(x)$为偶函数.

$\therefore g(x)=g(-x)=g(2-x)$，$g(x)$的周期为2.因为$g(x)$为周期为2的偶函数，

所以$g(2)=g(0)$，$g(-1)=g(1)$，令$x=0$时，$g(2)+g(-1)=g(1)+g(0)=g\left(-\frac{1}{2}\right)$，

令$x=-\frac{1}{2}$，得$g\left(\frac{3}{2}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{2}\right)$，$\because g\left(\frac{3}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{2}\right)$，$\therefore g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，

所以B不正确，C正确.

因为$g(x)$的周期为2，$\therefore g(2022)=g(0)$，所以D正确.故选：ACD.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.函数$f(x)=2^x+a\cdot 2^{-x}$，对任意实数x都有$f(-x)+f(x)=0$，则实数a的值为________.

【答案】-1

【解析】因为对任意实数x都有$f(-x)+f(x)=0$，所以$x=0$时也成立.

$\therefore f(0)+f(0)=0$，$f(0)=0$，$\therefore 2^0+a\cdot 2^0=0$，$1+a=0$，$\therefore a=-1$，

经检验符合题意，故答案为：-1.

14．若关于x的不等式$ax^2-x+a\le 0$在区间$[0,2]$上有解，则实数a的取值范围是__________.

【答案】$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

【解析】因为$x\in[0,2]$，所以由$ax^2-x+a\le 0$得$a\le\frac{x}{x^2+1}$，因为关于x的不等式$ax^2-x+a\le 0$在区间$[0,2]$上有解，所以只需a小于等于$\frac{x}{x^2+1}$的最大值，当$x=0$时，$\frac{x}{x^2+1}=0$，当$x\ne 0$时，$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$，当且仅当$x=\frac{1}{x}$时等号成立，

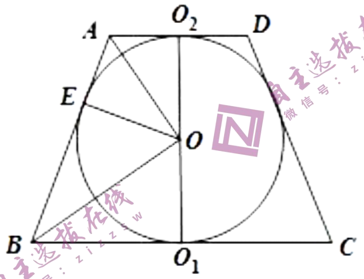
即当且仅当$x=1$时取等号，故$\dfrac{x}{x^2+1}$的最大值为$\dfrac{1}{2}$，所以$a\le\dfrac{1}{2}$，

即实数a的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.故答案为：$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

15.一个圆台两个底面的直径分别为2、4，该圆台存在内切球，则该圆台的体积为__________.

【答案】$\dfrac{14\sqrt{2}\pi}{3}$

【解析】如图为圆台的轴截面，设内切球的半径为r，则圆台的高为$2r$，圆台的母线长为$\sqrt{4r^2+1}$，则$AE=AO_2=1$，$BE=BO_1=2$，所以$\sqrt{4r^2+1}=3$，解得$r=\sqrt{2}$，



即圆台的高为$2\sqrt{2}$，所以圆台的体积为$\dfrac{1}{3}(4\pi+\pi+\sqrt{4\pi\times\pi})\times2\sqrt{2}=\dfrac{14\sqrt{2}\pi}{3}$.

故答案为：$\dfrac{14\sqrt{2}\pi}{3}$.

16．已知抛物线$C:y^2=2x$，点$P(2,2)$，O是坐标原点，A,B,M,N是抛物线C上的四个动点，$k_{OA}\cdot k_{OB}=k_{OM}\cdot k_{ON}=-1$，过点$P$分别作$AB,MN$的垂线，垂足分别为$E,F$，则点$EF$距离的最大值为__________.

【答案】2

【解析】设直线AB为$x=my+n$，$A\left(\dfrac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$B\left(\dfrac{y_2^2}{2},y_2\right)$，

由题知：$\begin{cases}x=my+n\\y^2=2x\end{cases}\Rightarrow y^2-2my-2n=0$，则$y_1y_2=-2n$.

$k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1}{\frac{y_1^2}{2}}\cdot\dfrac{y_2}{\frac{y_2^2}{2}}=\dfrac{4}{y_1y_2}=\dfrac{4}{-2n}=-1$，解得$n=2$.

所以直线 AB 为 $x=my+2$，恒过定点 $H(2,0)$.同理直线 MN 恒过定点 $H(2,0)$.

因为 $PE\perp AB$，$PF\perp MN$，则 E,F 在以 PH 为直径的圆上.

所以 $|EF|$ 的最大值为直径 $|PH|=\sqrt{(2-2)^2+2}=2$.故答案为：2.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，且 $\dfrac{2}{a_n}+\dfrac{1}{T_n}=1$.

（1）证明：数列 $\{T_n+1\}$ 是等比数列；

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】

（1）证明：由已知条件知 $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n$，①

于是 $T_{n-1}=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{n-1}(n\geq 2)$，②

由①②得 $\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=a_n$，③，又 $\dfrac{2}{a_n}+\dfrac{1}{T_n}=1$，④

由③④得 $T_n=2T_{n-1}+1$，所以 $T_n+1=2(T_{n-1}+1)$，令 $n=1$，由 $T_1=a_1$，得 $T_1=3$，

$\therefore T_1+1=4\neq 0$，所以数列 $\{T_n+1\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列.

（2）由（1）可得数列 $\{T_n+1\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列.

$T_n+1=4\times 2^{n-1}$，$\therefore T_n=2^{n+1}-1$，

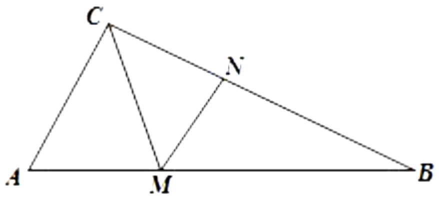
法 1： $n\geq 2$ 时，$a_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$，又 $a_1=T_1=3$ 符合上式，所以 $a_n=\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$；

法 2： 将 $T_n=2^{n+1}-1$ 代回 $\dfrac{2}{a_n}+\dfrac{1}{T_n}=1$ 得：$a_n=\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$.

18.（12 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle CAB=\dfrac{\pi}{3}$，$AC=2$，点 M 在线段 AB 上.

（1）若 $\cos\angle CMA=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$，求 CM 的长；

（2）点 N 是线段 CB 上一点，$MN=\sqrt{7}$，且 $BM+BN=4+\sqrt{3}$，求证：$S_{\Delta BMN}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.



【解析】

（1）在$\triangle CAM$中，$\because \cos\angle CMA=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$，$\therefore \sin\angle CMA=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

由正弦定理：$\dfrac{CM}{\sin\angle CAM}=\dfrac{AC}{\sin\angle CMA}$，得$CM=\dfrac{AC\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}}{\sin\angle CMA}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}=6$.

（2）在$\triangle BMN$中，$MN=\sqrt{7}$，$BM+BN=4+\sqrt{3}$，由余弦定理得：

$$MN^2=BM^2+BN^2-2BM\cdot BN\cos\angle ABC=(BM+BN)^2-2BM\cdot BN\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

即$(\sqrt{7})^2=(4+\sqrt{3})^2-2BM\cdot BN\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore BM\cdot BN=4\sqrt{3}$，

又$S_{\Delta BMN}=\dfrac{1}{2}BM\cdot BN\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\Delta BMN}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.

19.（12分）在一个袋子里有大小一样的6个小球，其中有4个红球和2个白球.

（1）现有放回地每次从中摸出1个球，连摸3次，设摸到红球的次数为X，求随机变量X的概率分布及期望；

（2）现无放回地依次从中摸出1个球，连摸2次，求第二次摸出白球的概率；

（3）若每次任意取出1个球，记录颜色后放回袋中，直到取到两次红球就停止，设取球的次数为Y，求$Y=4$的概率.

【解析】

（1）由题意分析$X\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，$X$的可能值为$0,1,2,3$.

所以$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$.

（2）记“第一次摸出红球”为事件A_1，“第一次摸出白球”为事件A_2，“第二次摸出白球”为事件B，则$P(A_1)=\frac{2}{3}$，$P(A_2)=\frac{1}{3}$，$P(A_1B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$，$P(A_2B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.

即第二次摸出白球的概率为：$P(A_1B)+P(A_2B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$.

（3）依题意，每次取到红球的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，取到白球的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

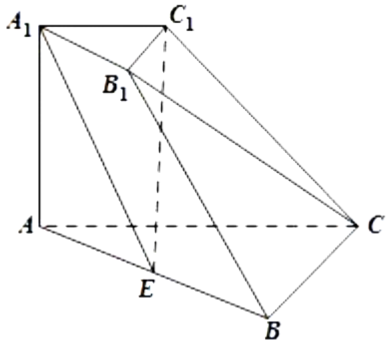
$Y=4$即是“前3次只有1次取到红球，其余2次取到白球，第4次取到红球”

$\therefore P(Y=4)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$.

20.（12分）三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的底面是正三角形，$AA_1\perp$平面ABC，$AB=4$，$A_1B_1=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，E是AB的中点，平面A_1C_1E交平面ABC于直线l.

（1）求证：$AC\,//\,l$；

（2）求直线B_1C与平面A_1C_1E所成角的正弦值.



【解析】

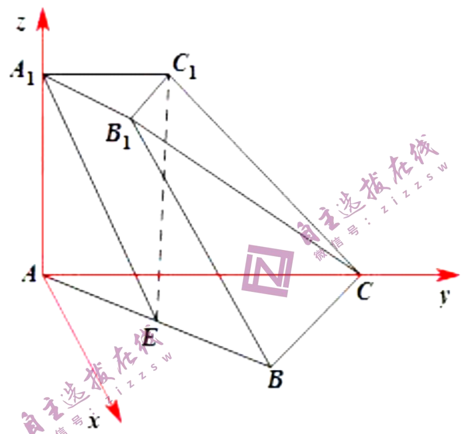
（1）在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC // A_1C_1$，

又$AC \not\subset$平面A_1C_1E，$A_1C_1 \subset$平面A_1C_1E，则$AC //$平面A_1C_1E，

又$AC \subset$平面ABC，平面$ABC \cap$平面$A_1C_1E = l$，所以$AC // l$.

（2）因为$AA_1 \perp$平面ABC，在平面ABC内作$Ax \perp AC$，

以A为原点，AC, AA_1分别为y轴，z轴建立空间直角坐标系，



则$B(2\sqrt{3},2,0)$，$E(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,4,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，$C_1(0,2,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{A_1E}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3}),\overrightarrow{A_1C_1}=(0,2,0),\overrightarrow{B_1C}=(-\sqrt{3},3,-\sqrt{3})$，

设平面A_1C_1E的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{A_1C_1}\cdot\vec{n}=2y=0\end{cases}$，

令$x=1$，则$\vec{n}=(1,0,1)$，设直线B_1C与平面A_1C_1E所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{B_1C},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{B_1C}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1C}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

所以直线B_1C与平面A_1C_1E所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

21．（12分）设椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-1,0),F_2(1,0)$，点$G\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$在椭圆$E$上.

（1）求椭圆E的方程；

（2）设点T在直线$x=3$上，过T的两条直线分别交E于A,B两点和P,Q两点，且$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线$AB$的斜率与直线$PQ$的斜率之和.

【解析】

（1）由已知椭圆的左、右焦点分别为$F_1(-1,0),F_2(1,0)$，$\therefore c=1$，

方法一：由题意得$\begin{cases}a^2-b^2=c^2=1\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$，$\therefore$椭圆$E$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

方法二：由$2a=|GF_1|+|GF_2|=\sqrt{(1+1)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-1)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=4$，

则$a=2$，又$c=1$，得$b=\sqrt{3}$，$\therefore$椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设$T(3,t)$，$AB:y-t=k_1(x-3)$，$PQ:y-t=k_2(x-3)$

由$\begin{cases}y-t=k_1(x-3)\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去$y$得：$(3+4k_1^2)x^2+8k_1(t-3k_1)x+4(t-3k_1)^2-12=0$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),x_1<3,x_2<3$，由题意$x_1+x_2=\dfrac{8k_1(t-3k_1)}{3+4k_1^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(t-3k_1)^2-12}{3+4k_1^2}$，

从而$|TA|\cdot|TB|=\sqrt{1+k_1^2}|3-x_1|\cdot\sqrt{1+k_1^2}|3-x_2|=(1+k_1^2)(3-x_1)(3-x_2)$

$=(1+k_1^2)[9+x_1x_2-3(x_1+x_2)]=(1+k_1^2)\left[9+\dfrac{4(t-3k_1)^2-12}{3+4k_1^2}+3\dfrac{8k_1(t-3k_1)}{3+4k_1^2}\right]$

$=\dfrac{(1+k_1^2)(4t^2+15)}{3+4k_1^2}$，同理$|TP|\cdot|TQ|=\dfrac{(1+k_2^2)(4t^2+15)}{3+4k_2^2}$，

又$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，所以$\dfrac{(1+k_1^2)}{3+4k_1^2}=\dfrac{(1+k_2^2)}{3+4k_2^2}$，即$k_1^2=k_2^2$，又$k_1\neq k_2$，

故$k_1+k_2=0$，直线AB的斜率与直线PQ的斜率之和为0.

22.（12分）函数$f(x)=a\ln(x+1)+x^2-x$.

（1）若曲线$y=f(x)$存在垂直于y轴的切线，求实数a的取值范围；

（2）设$0<a<1$，试探究函数$f(x)$的零点个数.

【解析】

（1）$f(x)=a\ln(x+1)+x^2-x$，则$f'(x)=\dfrac{2x^2+x-1+a}{x+1},x>-1$.

由题意，存在$x_0\in(-1,+\infty)$，使得$f'(x_0)=0$，

即关于x的方程$2x^2+x-1+a=0$在$(-1,+\infty)$上有实根，该方程等价于$a=-2x^2-x+1$，

则a的取值范围是函数$y=-2x^2-x+1,x\in(-1,+\infty)$的值域，

又函数$f(x)=-2x^2-x+1$在$\left(-1,-\dfrac{1}{4}\right)$单调递增，在$\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$单调递减，

且$f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{8}$，则函数$y=-2x^2-x+1,x\in(-1,+\infty)$的值域为$\left(-\infty,\dfrac{9}{8}\right]$，

所以a的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{9}{8}\right]$.

（2）当$0<a<1$时，令$g(x)=2x^2+x-1+a$，对称轴$x=-\dfrac{1}{4}$，

则$\Delta=9-8a>0,g(-1)=a>0,g(0)=-1+a<0$，

则$g(x)$存在两个零点x_1,x_2，$-1<x_1<0<x_2$，

在$(-1,x_1)$上，$g(x)>0,f'(x)>0,f(x)$递增；在(x_1,x_2)上，$g(x)<0,f'(x)<0,f(x)$递减；

在$(x_2,+\infty)$上，$g(x)>0,f'(x)>0,f(x)$递增.又$f(0)=0,f(x_1)>f(0)=0>f(x_2)$，

在$(-1,0)$上，$x^2-x\in(0,2)$，$f(x)<a\ln(x+1)+2$，

则$e^{-\frac{2}{a}}-1\in(-1,0)$，$f\left(e^{-\frac{2}{a}}-1\right)<0$，所以$f(x)$在$(-1,0)$上零点个数为$1$

又$f(1)=a\ln 2>0$，所以，$f(x)$在$(0,+\infty)$上零点个数为1，又$f(0)=0$.

综上，当$0<a<1$时，$f(x)$的零点个数为3个.