2020 年全国高中数学联合竞赛一试试题（A 卷）

一、填空题: **本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.**

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_9=13, a_{13}=1$, 则 $\log_{a_1}13$ 的值为________.

2. 在椭圆 Γ 中, A 为长轴的一个端点, B 为短轴的一个端点, F_1, F_2 为两个焦点. 若 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$, 则 $\dfrac{|AB|}{|F_1F_2|}$ 的值为________.

3. 设 $a>0$, 函数 $f(x)=x+\dfrac{100}{x}$ 在区间 $(0,a]$ 上的最小值为 m_1, 在区间 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 m_2. 若 $m_1m_2=2020$, 则 a 的值为________.

4. 设 z 为复数. 若 $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$ 为实数 (i 为虚数单位), 则 $|z+3|$ 的最小值为________.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6, BC=4$, 边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$, 则 $\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$ 的值为________.

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长均为 1, L, M, N 分别为棱 PA, PB, PC 的中点, 则该正三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为________.

7. 设 $a,b>0$, 满足: 关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个不同的实数解 x_1,x_2,x_3, 且 $x_1<x_2<x_3=b$, 则 $a+b$ 的值为________.

8. 现有 10 张卡片, 每张卡片上写有 1, 2, 3, 4, 5 中两个不同的数, 且任意两张卡片上的数不完全相同. 将这 10 张卡片放入标号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子中, 规定写有 i, j 的卡片只能放在 i 号或 j 号盒子中. 一种放法称为"好的", 如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数. 则"好的"放法共有________种.

二、解答题: **本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

9. **(本题满分 16 分)**

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 求 $\cos B+\sqrt{2}\cos C$ 的取值范围.

10. **(本题满分 20 分)**

对正整数 n 及实数 x $(0\leqslant x<n)$, 定义

$$f(n,x)=(1-\{x\})\cdot \mathrm{C}_n^{[x]}+\{x\}\cdot \mathrm{C}_n^{[x]+1},$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, $\{x\}=x-[x]$. 若整数 $m,n\geqslant 2$ 满足

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=123,$$

求 $f\left(n,\dfrac{1}{m}\right)+f\left(n,\dfrac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\dfrac{mn-1}{m}\right)$ 的值.

11. **(本题满分 20 分)**

在平面直角坐标系中, 点 A,B,C 在双曲线 $xy=1$ 上, 满足 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.

2020年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分．

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_9=13, a_{13}=1$，则$\log_{a_1}13$的值为________．

答案： $\frac{1}{3}$．

解： 由等比数列的性质知$\frac{a_1}{a_9}=\left(\frac{a_9}{a_{13}}\right)^2$，故$a_1=\frac{a_9^3}{a_{13}^2}=13^3$．所以$\log_{a_1}13=\frac{1}{3}$．

2. 在椭圆Γ中，A为长轴的一个端点，B为短轴的一个端点，F_1,F_2为两个焦点．若$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，则$\frac{|AB|}{|F_1F_2|}$的值为________．

答案： $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

解： 不妨设Γ的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$A(a,0), B(0,b)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$．由条件知

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=(-c-a)(c-a)+(-c^2+b^2)=a^2+b^2-2c^2=0.$$

所以$\frac{|AB|}{|F_1F_2|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c}=\frac{\sqrt{2c^2}}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

3. 设$a>0$，函数$f(x)=x+\frac{100}{x}$在区间$(0,a]$上的最小值为m_1，在区间$[a,+\infty)$上的最小值为m_2．若$m_1m_2=2020$，则a的值为________．

答案： 1或100．

解： 注意到$f(x)$在$(0,10]$上单调减，在$[10,+\infty)$上单调增．当$a\in(0,10]$时，$m_1=f(a), m_2=f(10)$；当$a\in[10,+\infty)$时，$m_1=f(10), m_2=f(a)$．因此总有

$$f(a)f(10)=m_1m_2=2020,$$

即$a+\frac{100}{a}=\frac{2020}{20}=101$，解得$a=1$或$a=100$．

4. 设z为复数．若$\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}$为实数（i为虚数单位），则$|z+3|$的最小值为________．

答案：$\sqrt{5}$.

解法 1：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，由条件知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{(a-2)+b\mathrm{i}}{a+(b-1)\mathrm{i}}\right)=\frac{-(a-2)(b-1)+ab}{a^2+(b-1)^2}=\frac{a+2b-2}{a^2+(b-1)^2}=0,$$

故 $a+2b=2$．从而

$$\sqrt{5}|z+3|=\sqrt{(1^2+2^2)((a+3)^2+b^2)}\geq|(a+3)+2b|=5,$$

即 $|z+3|\geq\sqrt{5}$．当 $a=-2,\ b=2$ 时，$|z+3|$ 取到最小值 $\sqrt{5}$．

解法 2：由 $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}\in\mathbf{R}$ 及复数除法的几何意义，可知复平面中 z 所对应的点在 2 与 i 所对应的点的连线上（i 所对应的点除外），故 $|z+3|$ 的最小值即为平面直角坐标系 xOy 中的点 $(-3,0)$ 到直线 $x+2y-2=0$ 的距离，即 $\dfrac{|-3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$．

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6,\ BC=4$，边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$，则 $\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$ 的值为__________．

答案：$\dfrac{211}{256}$．

解：记 M 为 AC 的中点，由中线长公式得

$$4BM^2+AC^2=2(AB^2+BC^2),$$

可得 $AC=\sqrt{2(6^2+4^2)-4\cdot 10}=8$．

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{CA^2+AB^2-BC^2}{2CA\cdot AB}=\dfrac{8^2+6^2-4^2}{2\cdot 8\cdot 6}=\dfrac{7}{8}$，所以

$$\begin{aligned}\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^4\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2}\right)\\&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)^2-3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2 A\\&=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 A=\frac{211}{256}.\end{aligned}$$

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长均为 1，L,M,N 分别为棱 PA,PB,PC 的中点，则该正三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为__________．

答案：$\dfrac{\pi}{3}$．

解：由条件知平面 LMN 与平面 ABC 平行，且点 P 到平面 LMN,ABC 的距离之比为 $1:2$．设 H 为正三棱锥 $P-ABC$ 的面 ABC 的中心，PH 与平面 LMN 交于点 K，则 $PH\perp$ 平面 ABC，$PK\perp$ 平面 LMN，故 $PK=\dfrac{1}{2}PH$．

正三棱锥 $P-ABC$ 可视为正四面体，设 O 为其中心（即外接球球心），则 O 在 PH 上，且由正四面体的性质知 $OH=\dfrac{1}{4}PH$．结合 $PK=\dfrac{1}{2}PH$ 可知 $OK=OH$，

即点O到平面LMN, ABC等距．这表明正三棱锥的外接球被平面LMN, ABC所截得的截面圆大小相等．

从而所求截面的面积等于ΔABC的外接圆面积，即$\pi\cdot\left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{3}$．

7. 设$a,b>0$，满足：关于x的方程$\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$恰有三个不同的实数解$x_1,x_2,x_3$，且$x_1<x_2<x_3=b$，则$a+b$的值为__________．

答案：144．

解：令$t=x+\frac{a}{2}$．则关于t的方程$\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}=b$恰有三个不同的实数解$t_i=x_i+\frac{a}{2}(i=1,2,3)$．

由于$f(t)=\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}$为偶函数，故方程$f(t)=b$的三个实数解关于数轴原点对称分布，从而必有$b=f(0)=\sqrt{2a}$．以下求方程$f(t)=\sqrt{2a}$的实数解．

当$|t|\le\frac{a}{2}$时，$f(t)=\sqrt{\frac{a}{2}-t}+\sqrt{\frac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\le 2a$，等号成立当且仅当$t=0$；当$t>\frac{a}{2}$时，$f(t)$单调增，且当$t=\frac{5a}{8}$时$f(t)=\sqrt{2a}$；当$t<-\frac{a}{2}$时，$f(t)$单调减，且当$t=-\frac{5a}{8}$时$f(t)=\sqrt{2a}$．

从而方程$f(t)=\sqrt{2a}$恰有三个实数解$t_1=-\frac{5}{8}a, t_2=0, t_3=\frac{5}{8}a$．

由条件知$b=x_3=t_3-\frac{a}{2}=\frac{a}{8}$，结合$b=\sqrt{2a}$得$a=128$．

于是$a+b=\frac{9a}{8}=144$．

8. 现有10张卡片，每张卡片上写有$1,2,3,4,5$中两个不同的数，且任意两张卡片上的数不完全相同．将这10张卡片放入标号为$1,2,3,4,5$的五个盒子中，规定写有i,j的卡片只能放在i号或j号盒子中．一种放法称为“好的”，如果1号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数．则“好的”放法共有________种．

答案：120．

解：用$\{i,j\}$表示写有i,j的卡片．易知这10张卡片恰为$\{i,j\}\ (1\le i<j\le 5)$．

考虑“好的”卡片放法．五个盒子一共放有10张卡片，故1号盒至少有3张卡片．能放入1号盒的卡片仅有$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}$．

情况一：这4张卡片都在1号盒中，此时其余每个盒中已经不可能达到4张卡片，故剩下6张卡片无论怎样放都符合要求，有$2^6=64$种好的放法．

情况二：这4张卡片恰有3张在1号盒中，且其余每盒最多仅有2张卡片．考虑$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$在1号盒，且$\{1,5\}$在5号盒的放法数N．

卡片$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$的放法有8种可能，其中6种是在$2,3,4$号的某个盒中放两张，其余2种则是在$2,3,4$号盒中各放一张．

若$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$有两张在一个盒中，不妨设$\{2,3\},\{2,4\}$在2号盒，则

$\{2,5\}$只能在5号盒，这样5号盒已有$\{1,5\},\{2,5\}$，故$\{3,5\},\{4,5\}$分别在3号与4号盒，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$的放法唯一；

若$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$在2, 3, 4号盒中各一张，则2, 3, 4号盒均至多有2张卡片，仅需再使5号盒中不超过2张卡片，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$有0张或1张在5号盒中，对应$C_3^0+C_3^1=4$种放法.

因此$N=6\times1+2\times4=14$．由对称性，在情况二下有$4N=56$种好的放法.

综上，好的放法共有$64+56=120$种.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分） 在$\triangle ABC$中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．求$\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围.

解： 记$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$．

由条件知$A=\dfrac{\pi}{4}$或$A=\dfrac{3\pi}{4}$．　　…………………4分

当$A=\dfrac{\pi}{4}$时，$B=\dfrac{3\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{3\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C=\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)\in(0,1].$$

…………………8分

当$A=\dfrac{3\pi}{4}$时，$B=\dfrac{\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos C=\sqrt{5}\sin(C+\varphi),$$

其中$\varphi=\arctan 3$．　　…………………12分

注意到$\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，函数$g(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right]$上单调增，在$\left[\dfrac{\pi}{2}-\varphi,\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调减，又$g(0)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2=g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sqrt{5}$，故$f\in(2,\sqrt{5}]$.

综上所述，$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围是$(0,1]\cup(2,\sqrt{5}]$.

…………………16分

10.（本题满分20分） 对正整数n及实数$x\ (0\le x<n)$，定义

$$f(n,x)=(1-\{x\})\cdot C_n^{[x]}+\{x\}\cdot C_n^{[x]+1},$$

其中$[x]$表示不超过实数x的最大整数，$\{x\}=x-[x]$．若整数$m,n\ge2$满足

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=123,$$

求$f\left(n,\dfrac{1}{m}\right)+f\left(n,\dfrac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\dfrac{mn-1}{m}\right)$的值.

解： 对$k=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k+\frac{i}{n}\right)=\mathrm{C}_m^k \cdot \sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)+\mathrm{C}_m^{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}=\frac{n-1}{2} \cdot \mathrm{C}_m^k+\mathrm{C}_m^{k+1} .$$

…………………5 分

所以

$$f\left(m, \frac{1}{n}\right)+f\left(m, \frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m, \frac{mn-1}{n}\right)=\sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{C}_m^j+\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k+\frac{i}{n}\right)$$

$$=2^m-2+\frac{n-1}{2} \cdot\left(\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^k+\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^{k+1}\right)$$

$$=2^m-2+\frac{n-1}{2} \cdot 2^m-1+2^m-1=(2^m-1)n-1 .$$

……………10 分

同理得 $f\left(n, \frac{1}{m}\right)+f\left(n, \frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n, \frac{mn-1}{m}\right)=(2^n-1)m-1$.

由条件知 $(2^m-1)n-1=123$，即 $(2^m-1)n=124$，故 $(2^m-1)\mid 124$. 又 $m \geq 2$，所以 $2^m-1 \in\{3,7,15,31,63,127, \cdots\}$，仅当 $m=5$ 时，$2^m-1=31$ 为124的约数，进而有 $n=\frac{124}{31}=4$. 进而

$$f\left(n, \frac{1}{m}\right)+f\left(n, \frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n, \frac{mn-1}{m}\right)=(2^4-1) \cdot 5-1=74 .$$

…………………20 分

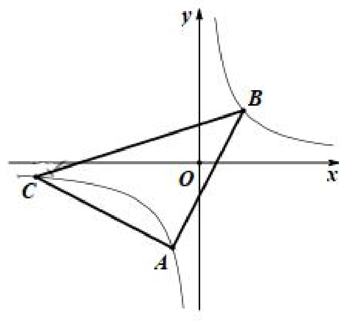
11.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系中，点 A, B, C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 ΔABC 为等腰直角三角形. 求 ΔABC 的面积的最小值.

解： 不妨设等腰直角 ΔABC 的顶点 A, B, C 逆时针排列，A 为直角顶点.

设 $\overrightarrow{AB}=(s, t)$，则 $\overrightarrow{AC}=(-t, s)$，且 ΔABC 的面积

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{s^2+t^2}{2} .$$

…………………5 分



注意到 A 在双曲线 $xy=1$ 上，设 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$，

则 $B\left(a+s, \frac{1}{a}+t\right)$, $C\left(a-t, \frac{1}{a}+s\right)$.

由 B, C 在双曲线 $xy=1$ 上，可知

$$(a+s)\left(\frac{1}{a}+t\right)=(a-t)\left(\frac{1}{a}+s\right)=1,$$

这等价于

$$\frac{s}{a}+at=-st, \qquad ①$$

$$-\frac{t}{a}+as=st. \qquad ②$$

由①、②相加，得 $\frac{s-t}{a}+a(t+s)=0$，即

$$a^2=\frac{t-s}{t+s}.\qquad ③$$

由①、②相乘，并利用③，得

$$-s^2t^2=\left(\frac{s}{a}+at\right)\left(-\frac{t}{a}+as\right)=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)st+s^2-t^2$$

$$=\left(\frac{t-s}{t+s}-\frac{t+s}{t-s}\right)\cdot st+s^2-t^2=\frac{4st}{s^2-t^2}\cdot st+s^2-t^2$$

$$=\frac{(s^2+t^2)^2}{s^2-t^2}.$$ ……………………10 分

所以由基本不等式得

$$(s^2+t^2)^4=-s^2t^2(s^2-t^2)^2=\frac{1}{4}\cdot 2s^2t^2\cdot 2s^2t^2\cdot(s^2-t^2)^2$$

$$\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2s^2t^2+2s^2t^2+(s^2-t^2)^2}{3}\right)^3=\frac{(s^2+t^2)^6}{108},\qquad ④$$

故 $s^2+t^2\ge\sqrt{108}=6\sqrt{3}$. ……………………15 分

以下取一组满足条件的实数 (s,t,a)，使得 $s^2+t^2=6\sqrt{3}$（进而由 s,t,a 可确定一个满足条件的 ΔABC，使得 $S_{\Delta ABC}=\frac{s^2+t^2}{2}=3\sqrt{3}$）.

考虑④的取等条件，有 $2s^2t^2=(s^2-t^2)^2$，即 $\frac{s^2}{t^2}=2\pm\sqrt{3}$.

不妨要求 $0<s<t$，结合 $s^2+t^2=6\sqrt{3}$，得 $s=\sqrt{3(\sqrt{3}-1)},\ t=\sqrt{3(\sqrt{3}+1)}$.

由①知 $a<0$，故由③得 $a=-\sqrt{\frac{t-s}{t+s}}$，其中 $t=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}s=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s$，从而有

$$a=-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}}.$$

综上，ΔABC 的面积的最小值为 $3\sqrt{3}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》