

高二数学参考答案及评分标准

2023.7

一、单项选择题(每小题 5 分, 共 40 分)

1. B 2. D 3. C 4. B 5. C 6. B 7. C 8. A

二、多项选择题(每小题 5 分, 共 20 分)

9. ACD 10. AC 11. ABD 12. BCD

三、填空题(每小题 5 分, 共 20 分)

13. $AC, A_1C_1, A_1D, B_1C, AB_1, DC_1$ 中的任意一条即可

14. $-\frac{1}{2}$ 15. $\leq$ 16. (985, 211)

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 证明: 因为 P, Q 分别为 A_1C_1, B_1C_1 的中点,

所以 PQ 平行且等于 $\frac{1}{2}A_1B_1$,

又因为 $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{3}$ 则 $\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{4}$,

所以 MN 平行且等于 $\frac{1}{4}AB$,

所以 MN 平行且等于 $\frac{1}{2}PQ$,

故四边形 PMNQ 为梯形, ...3 分

又因为三角形 ABC 为边长为 2 的正三角形,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{ABC} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 $S_{A_1B_1C_1} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

又 $S_{侧} = 3 \times 2 \times 2 = 12$,

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面积 $S_{棱柱侧} = 12 + 2\sqrt{3}$6 分

(2) 解: 因为三棱台 PQC_1-MNC 的高 $AA_1=2$,

由题可得,

$S_{PQC_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $S_{MNC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16}$, ...8 分

所以三棱台 PQC_1-MNC 的体积为:

$PQC_1-MNC = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{16}} \right) \times 2 = \frac{7\sqrt{3}}{24}$10 分

18. 解: (1) 设 $|an|$ 的公比为 q,

由 $\begin{cases} S_3 = 13 \\ a_3^2 = 3a_4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 13 \\ a_2 = 3 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 13 \\ a_1q = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} q = 3 \\ a_1 = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ a_1 = 9, \end{cases}$...2 分

又由题意知 $\{a_n\}$ 递增数列, 所以 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 3, \end{cases}$

所以 $a_n = 3^{n-1}$, ...4 分

所以 $b_1 = a_1 = 1, b_2 = a_2 - 1 = 2$,

所以等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 1, 故 $b_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$, ...6 分

(2) 因为 $c_n = \begin{cases} n \cdot 3^n, n \text{ 为奇数} \\ n \cdot 3^{n-1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$...7 分

所以 $c_{2n-1} + c_{2n} = -(2n-1) \cdot 3^{2n-1} + 2n \cdot 3^{2n-1} = 3^{2n-1} = a_{2n}$, ...8 分

所以 $T_{20} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_{19} + c_{20}$

$$= (c_1 + c_2) + (c_3 + c_4) + \dots + (c_{19} + c_{20})$$

$$= 3 + 3^3 + \dots + 3^{19}$$

$$= \frac{3 \times (1 - 9^{10})}{1 - 9}$$

$$= \frac{3}{8} (9^{10} - 1), \dots 12 \text{ 分}$$

19. 证明: (1) 设 $AB \cap CD = M$, 连结 B_1M ,

则 $O_1B_1 \parallel AB$, 即 $O_1B_1 \parallel OM$, 且 $B_1O_1 = 1$,

因为圆 O 的半径为 2, 且 $\triangle ACD$ 为正三角形,

$$\text{所以 } \frac{CD}{\sin 60^\circ} = 2R = 4, \text{ 所以 } CD = 2\sqrt{3},$$

因为 O 为正三角形 ACD 的外心, 所以 $AM \perp CD$,

$$\text{所以 } AM = \frac{\sqrt{3}}{2} CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3,$$

$$\text{又因为 } \frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}, \text{ 所以 } OM = 1, \dots 3 \text{ 分}$$

所以 $B_1O_1 \parallel OM$,

所以四边形 B_1O_1OM 为平行四边形,

所以 $OO_1 \parallel B_1M$, 又因为 $B_1M \subset \text{平面 } B_1CD$, $OO_1 \not\subset \text{平面 } B_1CD$,

所以 $OO_1 \parallel \text{平面 } B_1CD$5 分

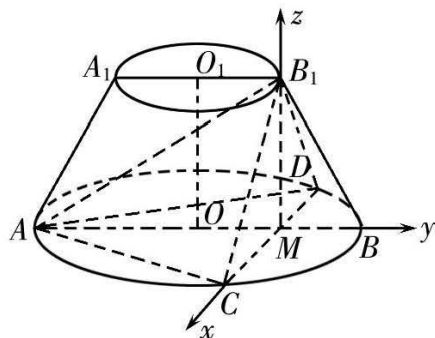
(2) 由圆台的性质知, $OO_1 \perp \text{平面 } ACD$,

又因为 $OO_1 \parallel B_1M$, 所以 $B_1M \perp \text{平面 } ACD$,

由(1)可知 $AM \perp CD$, ... 7 分

以 M 为原点, $\vec{MC}, \vec{MB}, \vec{MB_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系,

$$\text{则 } A(0, -3, 0), B_1(0, 0, \sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, 0, 0), C(\sqrt{3}, 0, 0) \vec{AD} = (-\sqrt{3}, 3, 0), \vec{AB_1} = (0, 3, \sqrt{3}),$$





设平面 AB_1D 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AB_1} \cdot n = 3y + \sqrt{3}z = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot n = -\sqrt{3}x + 3y = 0, \end{cases}$$

令 $y=1$ 得, $n = (\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3})$, ...10 分

$$\overrightarrow{CD} = (-2\sqrt{3}, 0, 0),$$

设直线 CD 与平面 AB_1D 所成的角为 θ ,

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CD}, n \rangle| = \frac{1-2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

所以直线 CD 与平面 AB_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$12 分

20.(1)依题意得, 当投入的专项资金不低于 20 万元时,

$$\text{即 } a_n \geq 20 \text{ 时, } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2}, b_n - b_{n-1} = 80 (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*),$$

此时 $\{a_n\}$ 是首项为 800, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$\{b_n\}$ 是首项为 40, 公差为 80 的等差数列, ...3 分

$$\text{所以 } a_n = 800 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, b_n = 80n - 40,$$

$$a_n < 20, \text{得 } 2^{n-1} > 40, \text{解得 } n \geq 7, \text{且 } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\text{所以 } \alpha_n = \begin{cases} 800 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & 1 \leq n \leq 6 \\ 20, & n \geq 7 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \dots 6 \text{ 分}$$

$$b_n = \begin{cases} 80n - 40, & 1 \leq n \leq 6 \\ 440, & n \geq 7 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases} n \in \mathbb{N}^*,$$

$$(2) \text{由(1)可知当 } 1 \leq n \leq 6 \text{ 时, 总利润 } S_n = \frac{n[40 + (80n - 40)]}{2} - \frac{800 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1600 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 40n^2 - 1600,$$

$$\text{因为 } S_n - S_{n-1} = -1600 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 80n - 40, n \geq 2, \dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{设 } f(x) = -1600 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 80x - 40,$$

则 $f(x)$ 为单调递增函数,

$$f(2) < 0, f(3) = 0, f(4) > 0,$$

$$\text{所以 } S_1 > S_2 = S_3, S_3 < S_4 < S_5 < S_6,$$

$$\text{又因为 } S_1 < 0, S_6 = -135 < 0,$$

所以当 $1 \leq n \leq 6$ 时, $S_n < 0$, 即前 6 年未盈利,

$$\text{当 } n \geq 7 \text{ 时, } S_n = S_6 + (b_1 - a_7) + (b_8 - a_8) + \dots + (b_n - a_n) = -135 + 420(n - 6),$$

$$\text{令 } S_n > 0, \text{得 } n \geq 7,$$

综上, 至少要经过 7 年后销售总收入才能超过专项资金的总投入... 12 分



21.(1)因为 $AD \parallel BC$,

所以 $\angle PDA$ 为异面直线 PD 与 BC 所成的角,

所以 $\angle PDA = 45^\circ$, ...1 分

又因为 $\angle APD = 90^\circ$,

所以 $AP = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = \sqrt{2}$,

又因为 $AB = 2, BP = \sqrt{6}$,

所以 $AB^2 + AP^2 = BP^2$,

所以 $BA \perp AP$, ...3 分

又因为 $BA \perp AD, AP \cap AD = A$,

所以 $BA \perp$ 平面 APD , ...4 分

$BA \subset$ 平面 $ABCD$,

所以平面 $APD \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 AD ,

取 AD 中点 O , 则 $PO \perp AD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

即 PO 就是点 P 到平面 $ABCD$ 的距离.

又因为 $PO = 1$,

所以点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 1... 5 分

(2) 延长 DE, AB , 设 $DE \cap AB = G$,

所以平面 PAB 与平面 PDE 的交线 l 即为直线 PG ,

又 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

故以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OP}$ 方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, ...7 分

则 $P(0, 0, 1), G(4, -1, 0), A(0, -1, 0), B(2, -1, 0), D(0, 1, 0)$,

设 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PG} = (4\lambda, -\lambda, -\lambda)$, 则 $Q(4\lambda, -\lambda, 1-\lambda)$,

因为 $BA \perp$ 平面 $APD, PD \subset$ 平面 APD ,

所以 $BA \perp PD$,

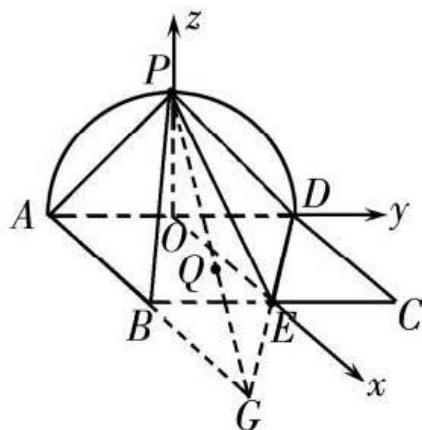
又因为 $PD \perp AP, BA \cap AP = A$,

所以 $PD \perp$ 平面 PAB ,

所以平面 QAB 的一个法向量 $n_1 = \overrightarrow{DP} = (0, -1, 1)$,

设平面 QCD 的法向量 $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

因为 $\overrightarrow{DC} = (2, 0, 0), \overrightarrow{DQ} = (4\lambda - \lambda, -1 - \lambda, 1 - \lambda)$,





$$\text{由 } \begin{cases} \vec{DC} \cdot \vec{n_2} = 0 \\ \vec{DQ} \cdot \vec{n_2} = 0 \end{cases},$$

$$\text{得 } \begin{cases} 2x_2 = 0, \\ 4\lambda x_2 - (\lambda + 1)y_2 + (1 - \lambda)z_2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } y_2 = 1 - \lambda,$$

$$\text{得 } \vec{n_2} = (0, 1 - \lambda, \lambda + 1), \dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle| = \frac{|\lambda - 1 + \lambda + 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2}} = \frac{|2\lambda|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\lambda^2 + 2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{解得 } \lambda = \pm \frac{1}{2}, \dots 11 \text{ 分}$$

$$PQ = \sqrt{\frac{1}{4}(16 + 1 + 1)} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \dots 12 \text{ 分}$$

22. 解: (1) 因为点 $(a_{n+1}, a_n^2 + 2a_n)$ 在直线 $y = x$ 上,

$$\text{所以 } a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n,$$

$$\text{令 } n=1, \text{ 则 } a_1^2 + 2a_1 - 8 = 0,$$

$$\text{解得 } a_1 = 21 \text{ 或 } a_1 = -4 (\text{舍}), \dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{且 } a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2,$$

$$\text{故 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\lg(a_{n+1} + 1)}{\lg(a_n + 1)} = \frac{2\lg(a_n + 1)}{\lg(a_n + 1)} = 2,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = \lg 3$ 为首项, 2 为公比的等比数列... 4 分

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } b_n = 2^{n-1} \lg 3 = \lg 3^{2^{n-1}}, \dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_n = \lg 3^{2^0} + \lg 3^{2^1} + \dots + \lg 3^{2^{n-1}} = \lg 3^{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}} = \lg 3^{2^n - 1}, \dots 7 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知, } b_n = \lg(a_n + 1) = \lg 3^{2^{n-1}},$$

$$\text{所以 } a_n = 3^{2^{n-1}} - 1, \dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } a_{n+1} = a_n(a_n + 2),$$

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n+1}},$$

$$\text{故 } c_n = \frac{2(a_n + 1)}{a_n(a_n + 2)} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n + 2} = 2 \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right), \dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = 2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^n} - 1} \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{3^{2^n} - 1}, \dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故 } T_x + \frac{1}{\lambda 10^{5x} + \mu} = 1 - \frac{2}{3^{2^x} - 1} + \frac{1}{\lambda \times 3^{2^{n-1}} + \mu}$$

$$= 1 - \frac{2}{3^{2^n} - 1} + \frac{2}{2\lambda \times 3^{2^{n-1}} + 2\mu},$$

要使上式为定值，只需 $\begin{cases} 2\lambda = 3, \\ 2\mu = -1, \end{cases}$

$$\text{故 } \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}, \\ \mu = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

所以当 $\lambda = \frac{3}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$ 时, $T_n + \frac{1}{\lambda^{S_n} + \mu}$ 为定值 1. ... 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线