2023 年兰州高三诊断

理科数学参考答案及评分标准

1. C 2. C 3. A 4. D 5. D 6. C 7. A 8. B 9. A 10. B 11. C 12. B

12.【解析】$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$

$\therefore \Delta=4[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq 0$

由于 a，b，c 不相等，所以 $\Delta>0$，所以函数必有两个不相同的零点

因为 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}<\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$，$c=\sin(\cos\frac{3}{4})>\sin(\cos\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\sqrt{2}}{2}>\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

所以 $c>a>b$

因此 $f(a)=(a-b)(a-c)<0$，$f(b)=(b-c)(b-a)>0$，$f(c)=(c-a)(c-b)>0$

所以函数的两个零点分别在区间 $(b,\ a)$ 和 $(a,\ c)$，故选 A

13. 1 14. $\sqrt{3}$ 15. $\frac{30\sqrt{11}}{11}$ 或 $\frac{81\sqrt{77}}{77}$ 或 $\frac{160\sqrt{231}}{231}$ 16. ①

16.【解析】对于函数 $y=ka^{x+b}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，k、b 为非零常数），有 $\frac{f(x+T)}{f(x)}=\frac{ka^{x+T+b}}{ka^{x+b}}=a^T$

由于 a，T 为常数，所以此函数满足 “ξ 函数” 定义，故①正确；

令 $x_2=x_1+T$，由于函数为 “ξ 函数”，因此 $T>0$，$x_2>x_1$，$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{f(x_1+T)}{f(x_1)}=m>1$

当 $f(x_1)<0$，$f(x_2)<f(x_1)$，故②错；

由于函数为 “ξ 函数”，且 $f(x)>0$，则 $m>0$

虽然 $\frac{\ln[f(x+kT)]-\ln\{f[(x+(k-1)T]\}}{(x+kT)-[x+(k-1)T]}=\frac{\ln\frac{f(x+kT)}{f[(x+(k-1)T]}}{T}=\frac{\ln m}{T}$（$k=1,2,\dots n$）为定值，但当 x 变化时，对于确定的 n 值，$(x+nT,\ln[f(x+nT)])$ 并不在同一直线上，故③错误.

17.【解析】(1)因为数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $i\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+i}-a_n=i$，所以当 $i=1$ 时满足 $a_{n+1}-a_n=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$． ……………………6 分

(2)因为数列 $\{b_n\}$ 满足：$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_n}{a_{n+2}}$ 且 $b_1=1$，

所以$\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{3}$，$\frac{b_3}{b_2}=\frac{2}{4}$，$\frac{b_4}{b_3}=\frac{3}{5}$，…$\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=\frac{n-2}{n}$，$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$

所以$\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}$

即：$\frac{b_n}{b_1}=\frac{2}{n(n+1)}$，所以$b_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geq 2)$.

又因为$b_1=1=\frac{2}{1\times 2}$符合$\frac{2}{n(n+1)}$当$n=1$时的值，所以数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\in N^*)$.

因为$b_n=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，所以$S_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}(n\in N^*)$

所以数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=\frac{2n}{n+1}(n\in N^*)$……………………12分

18.【解析】(1)方案一：选条件①②.

因为在四棱锥$S-ABCD$中$SB=SC$，点M是BC的中点，$SM=2$，所以$SM\perp BC$.

又因为在$Rt\Delta SBM$中，$\cos\angle SBM=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$BM=1$.

又因为$ABCD$是矩形，$BC=2AB$，所以$BM=AB=1$，$AM=\sqrt{2}$，

由$SA=\sqrt{6}$，$AM=\sqrt{2}$，$SM=2$可得：$SA^2=AM^2+SM^2$，所以$SM\perp AM$.

则由$\begin{cases}SM\perp BC\\ SM\perp AM\\ AM\cap BC=M\end{cases}$可得：$SM\perp$底面$ABCD$，又因为$SM\subset$侧面$SBC$，

所以侧面$SBC\perp$底面$ABCD$.　　　　　　　　　　………………6分

方案二：选条件①③.

因为在四棱锥$S-ABCD$中$SB=SC$，点M是BC的中点，$SM=2$，所以$SM\perp BC$.

又因为在ΔSAM中，$SA=\sqrt{6}$，$\sin\angle SAM=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$SM=2$，

所以由正弦定理得：$\frac{SA}{\sin\angle SMA}=\frac{SM}{\sin\angle SAM}$，即$\frac{\sqrt{6}}{\sin\angle SMA}=\frac{2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$，所以$\sin\angle SMA=1$

即$\angle SMA=\frac{\pi}{2}$，所以$SM\perp MA$.

则由$\begin{cases} SM\perp BC \\ SM\perp AM \\ AM\cap BC=M \end{cases}$ 可得：$SM\perp$底面$ABCD$，又因为$SM\subset$侧面SBC，

所以侧面$SBC\perp$底面$ABCD$. ………………6 分

方案三：选条件②③.

因为在四棱锥$S-ABCD$中$SB=SC$，点M是BC的中点，$SM=2$，所以$SM\perp BC$，

又因为在$Rt\Delta SBM$中，$\cos\angle SBM=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$BM=1$.

又因为$ABCD$是矩形，$BC=2AB$，所以$BM=AB=1$，$AM=\sqrt{2}$，

又因为在ΔSAM中，$\sin\angle SAM=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则$\cos\angle SAM=\frac{\sqrt{3}}{3}$

设$SA=x$，$SM^2=SA^2+AM^2-2SA\cdot AM\cos\angle SAM$，

所以有：$3x^2-2\sqrt{6}x-6=0$，解之得$x_1=\sqrt{6}$或$x_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}$（舍）所以$SA=\sqrt{6}$，

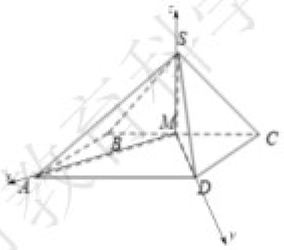
由$SA=\sqrt{6}$，$AM=\sqrt{2}$，$SM=2$可得：$SA^2=AM^2+SM^2$，所以$SM\perp AM$.

则由$\begin{cases} SM\perp BC \\ SM\perp AM \\ AM\cap BC=M \end{cases}$ 可得：$SM\perp$底面$ABCD$，又因为$SM\subset$侧面SBC，

所以侧面$SBC\perp$底面$ABCD$. ………………6 分

(2)在(1)条件下知$SM\perp$底面$ABCD$，且$MD\perp AM$，

故如图所示：以M为坐标原点，以MA所在直线为x轴，以MD所在直线为y轴，以MS所在直线为z轴建立空间直角坐标系，



易得$S(0,0,2)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$D(0,\sqrt{2},0)$，$C(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，

设平面SAD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\boldsymbol{n}\perp\overline{SD}$，$\boldsymbol{n}\perp\overline{SA}$，故$\begin{cases}\sqrt{2}y-2z=0\\ \sqrt{2}x-2z=0\end{cases}$，

令$x=\sqrt{2}$得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$，而$\overline{SC}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$，

若直线 SC 与平面 SAD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|n\cdot\overrightarrow{SD}|}{|n|\cdot|\overrightarrow{SD}|}=\dfrac{2}{5}$

所以直线 SC 与平面 SAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{5}$ ………………12 分

19.【解析】(1)根据上述表格完成列联表：

	16 强	非 16 强	合计
欧洲地区	44	22	66
其他地区	36	58	94
合计	80	80	160

$K^2=\dfrac{160\times(44\times58-22\times36)^2}{80\times80\times66\times94}=12.482>3.841$

所以有 95%的把握认为球队进入世界杯 16 强与来自欧洲地区有关…………………………6 分

(2)设“参赛双方在 90 分钟内打平”为事件 A，“参赛双方在加时赛打平”为事件 B，“全场比赛打平”为事件 C

根据题意可知，$P(C)=P(A\cdot B)=\dfrac{1}{9}$，则 $\xi\sim B(2,\dfrac{1}{9})$，

$P(\xi=0)=C_2^0\cdot(\dfrac{1}{9})^0\cdot(\dfrac{8}{9})^2=\dfrac{64}{81}$，$P(\xi=1)=C_2^1\cdot(\dfrac{1}{9})^1\cdot(\dfrac{8}{9})^1=\dfrac{16}{81}$，$P(\xi=2)=C_2^2\cdot(\dfrac{1}{9})^2\cdot(\dfrac{8}{9})^0=\dfrac{1}{81}$

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{64}{81}$	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{1}{81}$

则 $E(\xi)=2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{9}$ ………………12 分

20.【解析】(1) 由已知可得：$\begin{cases}bc=\sqrt{3},\\a=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}b=1\\c=\sqrt{3}\end{cases}$

所以椭圆 E 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$………………5 分

(2) 由条件可知，直线 AB 的斜率必存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+d$

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\y=kx+d,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kdx+4d^2-4=0$

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，故 $x_1+x_2=\dfrac{-8kd}{1+4k^2}$，$y_1+y_2=\dfrac{2d}{1+4k^2}$

所以点 P 坐标为 $(\dfrac{-4kd}{1+4k^2},\dfrac{d}{1+4k^2})$

因为椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>n>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $m^2=4n^2$

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4n^2\\ y=kx+d\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kdx+4d^2-4n^2=0$

故 $\Delta=16(4n^2k^2-d^2+n^2)$

又由于点 P 在椭圆 E_1 上，因此 $(\dfrac{-4kd}{1+4k^2})^2+4(\dfrac{d}{1+4k^2})^2=4n^2$

所以 $4k^2d^2+d^2=n^2(1+4k^2)^2$　　所以 $d^2=n^2(1+4k^2)$

所以 $\Delta=16(4n^2k^2-d^2+n^2)=0$

所以椭圆 E_1 与直线 AB 相切……………12 分

21.【解析】(1) 可知函数的定义域为 $(0,+\infty)$

当 $n=1$ 时，$f(x)=(x-1)\ln x$，$f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$

当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，$1-\dfrac{1}{x}<0$，故 $f'(x)<0$，函数为减函数；当 $x>1$ 时，$\ln x>0$，$1-\dfrac{1}{x}>0$，故 $f'(x)>0$，函数为增函数

综上，函数 $y=f(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$……………4 分

(2) 当 $n>1$ 时，可知函数存在零点 1 和 $n^{\frac{1}{n}}$，且 $n^{\frac{1}{n}}>1^{\frac{1}{n}}=1$，因此，$Q$ 点坐标为 $(n^{\frac{1}{n}},0)$

ⅰ）由于 $f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}-\dfrac{n}{x}$，所以 $f'(n^{\frac{1}{n}})=n\cdot n^{\frac{n-1}{n}}\ln n^{\frac{1}{n}}+n^{\frac{n-1}{n}}-\dfrac{n}{n^{\frac{1}{n}}}=n^{\frac{n-1}{n}}\ln n$

所以 $g(x)=(n^{\frac{n-1}{n}}\ln n)x-n\ln n$

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}-\dfrac{n}{x}-n^{\frac{n-1}{n}}\ln n$

当 $1<x<n^{\frac{1}{n}}$ 时，$0<\ln x<\dfrac{1}{n}\ln n$，$0<x^{n-1}<n^{\frac{n-1}{n}}$

$\therefore nx^{n-1}\ln x < n^{\frac{n-1}{n}}\ln n \qquad nx^{n-1}\ln x - n^{\frac{n-1}{n}}\ln n < 0$

$\because 1 < x < n^{\frac{1}{n}} \qquad \therefore \frac{n}{x} > \frac{n}{n^{\frac{1}{n}}} = n^{\frac{n-1}{n}} \qquad \therefore -\frac{n}{x} < -n^{\frac{n-1}{n}} \qquad \therefore x^{n-1} - \frac{n}{x} < n^{\frac{n-1}{n}} - n^{\frac{n-1}{n}} = 0$

$\therefore h'(x) < 0 \qquad h(x)$ 为减函数

同理，当 $x > n^{\frac{1}{n}}$ 时，$h(x)$ 为增函数

$\therefore h(x) \ge h(n^{\frac{1}{n}}) = \ln n - \ln n - n\ln n + n\ln n = 0$

所以当 $x > 1$ 时，$f(x) \ge g(x)$ ………………8 分

ii）由于方程 $f(x) = t(0 < t < n-1)$ 有两根 a，b，不妨设 $a > b$，则 $0 < b < 1$，$a > n^{\frac{1}{n}}$

设 $g(x_0) = t$，则 $x_0 = \dfrac{t + n\ln n}{n^{\frac{n-1}{n}}\ln n} = n^{\frac{1-n}{n}} \cdot \dfrac{t + n\ln n}{\ln n} = \dfrac{n^{\frac{1-n}{n}}t}{\ln n} + n^{\frac{1}{n}}$

由 i）知，$g(x_0) = f(a) > g(a)$，由于 $y = g(x)$ 是增函数，所以 $a < x_0$

$\therefore |a - b| < x_0 - 0 = \dfrac{n^{\frac{1-n}{n}}t}{\ln n} + n^{\frac{1}{n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n^{1-n}}}{\ln n}t + \sqrt[n]{n}$ ………………12 分

22.【解析】(1)由条件可知曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$，

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$，由 $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ 可得公共弦方程 $x - y = 0$，

$(\dfrac{|MN|}{2})^2 = 1 - (\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2$，解得线段 MN 的长度为 $\sqrt{2}$ ……………………………5 分

(2) 由条件可知曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = a + 1$，

将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = 3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)代入曲线 C_2 的直角坐标方程得：$t^2 + \sqrt{2}t - a + 4 = 0$

$|PA| \cdot |PB| = |t_1 \cdot t_2| = |a - 4| = 1$，实数 $a = 3$ 或 $a = 5$

由于 $\Delta = 2 + 4(a-4) = 4a - 12 > 0$，故 $a = 5$ ……………………………10 分

23.【解析】(1)由 $\begin{cases} x \le -1 \\ -3x \ge 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 < x < 2 \\ x + 4 \ge 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \ge 2 \\ 3x \ge 4 \end{cases}$ 解得 $x \le -\dfrac{4}{3}$ 或 $0 \le x < 2$ 或 $x \ge 2$，

所以不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup[0,+\infty)$……………………5 分

(2)因为 $f(x)+ax-1>0(x>0)$，所以 $a>\left[\frac{1-f(x)}{x}\right]_{\max}$ $(x>0)$ 又因为 $f(x)=\begin{cases}x+4, 0<x\le 2,\\ 3x, \ x>2,\end{cases}$

则 $\left[\frac{1-f(x)}{x}\right]=\begin{cases}-1-\frac{3}{x}, 0<x\le 2,\\ -3+\frac{1}{x}, \ x>2,\end{cases}$ 所以 $a>\left[\frac{1-f(x)}{x}\right]_{\max}=-\frac{5}{2}$……………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。