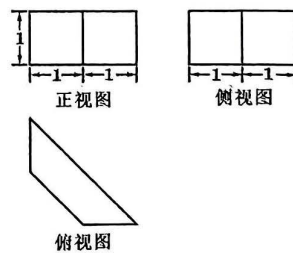


2023—2024—1 月考 1 数学 试题 (文科)

(满分: 150 分, 考试时间: 120 分钟)

一、选择题 (共 12 小题, 每小题 5 分, 计 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

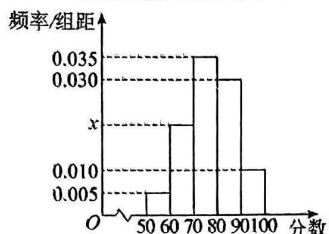
1. 已知 $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x(x-3) \leq 0\}$, 函数 $y = \ln(x-1)$ 的定义域为集合 B , 则 $A \cap B =$ ()
- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $(1, 3]$ D. $[1, 3]$
2. 下列函数中, 是奇函数且在定义域内单调递减的是 ()
- A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = 2^{|x|}$
- C. $f(x) = x^3 + x$ D. $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$
3. 欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 由瑞士数学家欧拉发现, 其将自然对数的底数 e , 虚数单位 i 与三角函数 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 联系在一起, 被誉为“数学的天桥”, 若复数 $z = \sqrt{e^{\frac{i\pi}{2}}}$, 则 z 的虚部为 ()
- A. i B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 据实验检测可知, 海面上的大气压强为 760mmHg, 海面 500m 高空处的大气压强为 700mmHg, 研究表明, 大气压强 p (单位: mmHg) 与高度 h (单位: m) 之间的关系式为 $\ln p = -kh + \ln 760$ (k 为常数). 由此预测海面上 1000m 高空处的大气压强大约是 (保留整数部分) ()
- A. 645mmHg B. 646mmHg C. 647mmHg D. 648mmHg
5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 ()
- A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $3\sqrt{2}$
6. 已知 $\vec{a} = (\sin\alpha, 1)$, $\vec{b} = (1, 2\cos\alpha)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ ()
- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. -1 D. 3
7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{15} = 30$, $S_{16} < 0$, 则 ()
- A. 当 $n=15$ 时, $|S_n|$ 最大 B. 当 $n=16$ 时, $|S_n|$ 最小
- C. 数列 $\{S_n\}$ 中存在最大项, 且最大项为 S_8 D. 数列 $\{S_n\}$ 中存在最小项
8. $\triangle ABC$ 三内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则“ $a > b$ ”是“ $\cos 2A < \cos 2B$ ”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 即不充分也不必要条件
9. 某校举行知识竞赛, 对全校参赛的 1000 名学生的得分情况进行了统计, 把得分数据按 $[50, 60)$, $[60, 70)$,



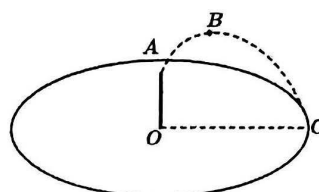
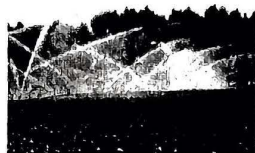
试题第 1 页, 共 4 页

[70,80), [80,90), [90,100]分成5组, 得到如图所示的频率分布直方图, 则下列说法不正确的是 ()

- A. 图中的 x 值为 0.020
B. 得分在 [80,100] 的人数为 400
C. 这组数据的极差为 50
D. 这组数据的平均数的估计值为 77



(第9题图)



(第10题图)

10. 某农场为节水推行喷灌技术, 喷头装在管柱 OA 的顶端 A 处, 喷出的水流在各个方向上呈抛物线状, 如图所示. 现要求水流最高点 B 离地面 4m , 点 B 到管柱 OA 所在直线的距离为 3m , 且水流落在地面上以 O 为圆心, 以 7m 为半径的圆上, 则管柱 OA 的高度为 ()

- A. $\frac{5}{3}\text{m}$ B. $\frac{7}{4}\text{m}$ C. $\frac{9}{4}\text{m}$ D. $\frac{7}{3}\text{m}$

11. 已知圆 O 的直径 $AB=4$, 若平面内一个动点 M 与点 A 的距离是它与点 B 距离的 $\sqrt{2}$ 倍, 则 $\triangle MAB$ 的面积的最大值为 ()

- A. 64 B. 12 C. $6\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

12. 已知 $\lambda > 0$, 若关于 x 的方程 $\frac{e^{x-1}}{x} - \lambda x + \lambda \ln(\lambda x) = 0$ 存在正零点, 则实数 λ 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $[3, +\infty)$

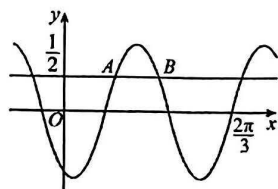
二、填空题 (本题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 设实数 x, y , 满足 $\begin{cases} x-y-2 \leq 0 \\ x+2y-4 \geq 0 \\ 2y-3 \leq 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值是_____.

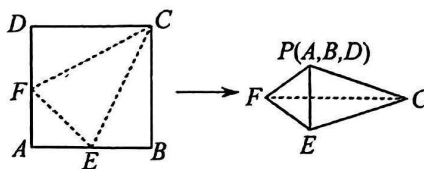
14. 已知函数 $f(x) = \frac{a^x}{2^x+1}$ ($a > 0$) 为偶函数, 则 $f(2)$ 的值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 如图 A, B 是直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点, 若 $|AB| = \frac{\pi}{6}$, 则

$f(\pi) =$ _____.



(第15题图)



(第16题图)

16. 如图, E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB, AD 的中点, 把 $\triangle AEF, \triangle CBE, \triangle CFD$ 折起构成一个三棱锥 $P-CEF$ (A, B, D 重合于 P 点), 则三棱锥 $P-CEF$ 的外接球与内切球的表面积之比是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题 (60 分)

17. 某学校为学生开设了一门模具加工课, 经过一段时间的学习, 拟举行一次模具加工大赛, 学生小明、小红打算报名参加大赛. 赛前, 小明、小红分别进行了为期一周的封闭强化训练, 下表记录了两人在封闭强化训练期间每天加工模具成功的次数, 其中小明第 7 天的成功次数 a 忘了记录, 但知道 $36 \leq a \leq 60, a \in \mathbb{Z}$.

	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
序号 x	1	2	3	4	5	6	7
小明成功次数	16	20	20	25	30	36	a
小红成功次数	16	22	25	26	32	35	35

(I) 求这 7 天内小明成功的总次数不少于小红成功的总次数的概率;

(II) 根据小明这 7 天内前 6 天的成功次数, 求其成功次数 y 关于序号 x 的线性回归方程, 并估计小明第七天成功次数 a 的值.

参考公式: 回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率与截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据: $1 \times 16 + 2 \times 20 + 3 \times 20 + 4 \times 25 + 5 \times 30 + 6 \times 36 = 582; 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$.

18. 已知函数 $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及其在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $f\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{3}, a = \sqrt{3}, c = 1$, 求 $\sin B$ 的值.

19. 已知椭圆的中心在坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 且_____.

在①过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$; ②过焦点且垂直于长轴的弦的长度为 3; ③长轴长为 4; 这三个条件中任选一个, 补充在

试题第 3 页, 共 4 页

上面问题中，并解答。

(I) 求椭圆的标准方程；

(II) 过点 $N(0,1)$ 的直线 l 与 x 轴交于点 M ，与椭圆 C 交于 A, B 两点，若 $|AM|=|BN|$ ，求直线 l 的方程。

20. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(x+1)$ 。

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x=2$ 处切线的斜率；

(II) 当 $x > 0$ 时，证明： $f(x) > 1$ 。

(III) 对任意的正整数 n ，证明： $\ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$ 。

21. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $4(a-c)\sin A = 4b\sin B - c\sin C$ 。

(I) 证明： $a - b = \frac{c}{2}$ ；

(II) 若 $c = 2\sqrt{2}$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 3，求 $\triangle ABC$ 的内切圆面积。

(二) 选考题 (共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按照所做的第一题计分)

22. 在直角坐标系中，以原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，点 A 的极坐标为 $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ ，点 B

的极坐标为 $\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$ ，曲线 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 。

(I) 求曲线 C 和直线 AB 的极坐标方程；

(II) 过点 O 的射线 l 交曲线 C 于 M 点，交直线 AB 于 N 点，若 $|OM| \cdot |ON| = 2$ ，求射线 l 所在直线的直角坐标方程。

23. 已知函数 $f(x) = |x-2| + 3|x|$ 。

(I) 求不等式 $f(x) \geq 10$ 的解集；

(II) 若 $f(x)$ 的最小值为 m ，正数 a, b, c 满足 $a+b+c=m$ ，求证 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线

