# 2021年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）暨2021全国高中数学联合竞赛 一试（A卷）参考答案及评分标准

**说明：**

**1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次．**

**2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不得增加其他中间档次．**

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分．

**1.** 等差数列$\{a_n\}$满足$a_{2021}=a_{20}+a_{21}=1$，则$a_1$的值为__________．

**答案：** $\frac{1981}{4001}$．

**解：** 设$\{a_n\}$的公差为$d$．由条件知$\begin{cases}a_1+2020d=1,\\2a_1+39d=1,\end{cases}$ 解得$a_1=\frac{1981}{4001}$．

**2.** 设集合$A=\{1,2,m\}$，其中$m$为实数．令$B=\left\{a^2\,\middle|\,a\in A\right\}$，$C=A\cup B$．若$C$的所有元素之和为$6$，则$C$的所有元素之积为__________．

**答案：** $-8$．

**解：** 由条件知$1,2,4,m,m^2$（允许有重复）为$C$的全部元素．

注意到，当$m$为实数时，$1+2+4+m+m^2>6$，$1+2+4+m^2>6$，故只可能是$C=\{1,2,4,m\}$，且$1+2+4+m=6$．于是$m=-1$（经检验符合题意），此时$C$的所有元素之积为$1\times2\times4\times(-1)=-8$．

**3.** 设函数$f(x)$满足：对任意非零实数$x$，均有$f(x)=f(1)\cdot x+\frac{f(2)}{x}-1$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为__________．

**答案：** $\sqrt{3}-1$．

**解：** 令$x=1,2$，分别得$f(1)=f(1)+f(2)-1$与$f(2)=2f(1)+\frac{f(2)}{2}-1$，解得$f(2)=1,\ f(1)=\frac{3}{4}$．从而对$x\neq0$，有$f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{x}-1$．

当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)\geq2\sqrt{\frac{3}{4}x\cdot\frac{1}{x}}-1=\sqrt{3}-1$，当$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时等号成立．

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为$\sqrt{3}-1$．

**4.** 设函数$f(x)=\cos x+\log_2 x\ (x>0)$，若正实数$a$满足$f(a)=f(2a)$，则$f(2a)-f(4a)$的值为__________．

**答案：** $-3$或$-1$．

**解：** 由条件得$\cos a+\log_2 a=\cos 2a+\log_2 2a=2\cos^2 a-1+1+\log_2 a$，所以

$\cos a = 2\cos^2 a$，进而得 $\cos a = 0$ 或 $\frac{1}{2}$，相应有 $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = -1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

于是

$$f(2a) - f(4a) = \cos 2a + \log_2 2a - \cos 4a - \log_2 4a = \cos 2a - 2\cos^2 2a$$

$$= \begin{cases} -3, & 若 \cos 2a = -1, \\ -1, & 若 \cos 2a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

**5.** 在 $\Delta ABC$ 中，$AB = 1,\ AC = 2,\ B - C = \frac{2\pi}{3}$，则 $\Delta ABC$ 的面积为________.

**答案：** $\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

**解：** 由正弦定理知 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = 2$，又 $B - C = \frac{2\pi}{3}$，故

$$2\sin C = \sin B = \sin\left(C + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sin C + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C,$$

即 $\frac{5}{2}\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$，所以 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

记 $\Delta ABC$ 的面积为 $S$．注意到 $A = \pi - B - C = \frac{\pi}{3} - 2C$，故

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2C - \frac{1}{2}\sin 2C.$$

由 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{5}$ 知 $\cos 2C = \frac{1 - \tan^2 C}{1 + \tan^2 C} = \frac{11}{14},\ \sin 2C = \frac{2\tan C}{1 + \tan^2 C} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$，从而

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11}{14} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

**6.** 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px\ (p > 0)$ 的焦点为 $F$，过 $\Gamma$ 上一点 $P$（异于 $O$）作 $\Gamma$ 的切线，与 $y$ 轴交于点 $Q$．若 $|FP| = 2,\ |FQ| = 1$，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的数量积为________.

**答案：** $\frac{3}{2}$.

**解：** 设 $P\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)(t \neq 0)$，则 $\Gamma$ 的切线 $PQ$ 的方程为 $yt = p\left(x + \frac{t^2}{2p}\right)$．令 $x = 0$，得 $y = \frac{t}{2}$，故 $Q\left(0, \frac{t}{2}\right)$．又 $F$ 坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，进而

$$|FP| = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{t^2}{2p}\right)^2 + t^2} = \frac{p}{2} + \frac{t^2}{2p},\quad |FQ| = \frac{\sqrt{p^2 + t^2}}{2},$$

结合 $|FP| = 2,\ |FQ| = 1$ 可分别得 $p^2 + t^2 = 4p$，$p^2 + t^2 = 4$．所以 $p = 1,\ t^2 = 3$.

于是 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{t^2}{2} = \frac{3}{2}$.

**7.** 一颗质地均匀的正方体骰子，六个面上分别标有点数$1,2,3,4,5,6$．随机地抛掷该骰子三次（各次抛掷结果相互独立），所得的点数依次为$a_1,a_2,a_3$，则事件“$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=6$”发生的概率为__________．

**答案**：$\frac{1}{4}$．

**解**：注意到$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=2\max\limits_{1\le i\le 3}a_i-2\min\limits_{1\le i\le 3}a_i$．因此，掷得的三个点数$a_1,a_2,a_3$满足条件，当且仅当最大数与最小数之差为 3，即$a_1,a_2,a_3$是$x,x+d,x+3$的一个排列，其中$x\in\{1,2,3\}$，$d\in\{0,1,2,3\}$．

对每个$x\in\{1,2,3\}$，当$d=0$或$d=3$时，$x,x+d,x+3$各有 3 种不同的排列；当$d=1$或$d=2$时，$x,x+d,x+3$各有 6 种不同的排列．

因此，满足条件的点数$a_1,a_2,a_3$有$3\times(2\times3+2\times6)=54$种情况．

从而所求概率为$\frac{54}{6^3}=\frac{1}{4}$．

**8.** 设有理数$r=\frac{p}{q}\in(0,1)$，其中$p,q$为互素的正整数，且$pq$整除$3600$．这样的有理数$r$的个数为__________．

**答案**：$112$．

**解**：设集合$\Omega=\left\{r\,\middle|\, r=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbf{N}^*,\ (p,q)=1,\ pq\mid 3600\right\}$．

考虑$\Omega$的任一元素$r$的最简分数形式$\frac{p}{q}$，因$3600$的标准分解为$2^4\times3^2\times5^2$，可设$p=2^A\times3^B\times5^C$，$q=2^a\times3^b\times5^c$，其中$\min\{A,a\}=\min\{B,b\}=\min\{C,c\}=0$，且$A+a\le4,B+b\le2,C+c\le2$．

这样的数对$(A,a)$共有$9$种取法，数对$(B,b)$共有$5$种取法，数对$(C,c)$共有$5$种取法．所以$\Omega$的元素个数$|\Omega|=9\times5\times5=225$．

满足条件的有理数的全体为$\Omega\cap(0,1)$．注意到，$r\in\Omega$当且仅当$\frac{1}{r}\in\Omega$，特别地，$1\in\Omega$．因此，$\Omega\setminus\{1\}$中的元素可按乘积为$1$配成$\frac{1}{2}(|\Omega|-1)=112$对，每对中恰有一数属于$(0,1)$，即恰有一数满足条件．从而所求有理数$r$的个数为$112$．

**二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

**9.（本题满分 16 分）**已知复数列$\{z_n\}$满足：

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n\mathrm{i})\ (n=1,2,\cdots),$$

其中$\mathrm{i}$为虚数单位．求$z_{2021}$的值．

**解**：对$n\in\mathbf{N}^*$，设$z_n=a_n+b_n\mathrm{i}\ (a_n,b_n\in\mathbf{R})$，则

$$a_{n+1}+b_{n+1}\mathrm{i}=z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n\mathrm{i})=\overline{z_n}+|z_n|^2\cdot\mathrm{i}=a_n-b_n\mathrm{i}+(a_n^2+b_n^2)\mathrm{i},$$

因此$a_{n+1}=a_n,\ b_{n+1}=a_n^2+b_n^2-b_n$．　……………4 分

又由 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 知，$a_1=\frac{\sqrt{3}}{2}, b_1=0$，所以 $a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，进而

$$b_{n+1}=b_n^2-b_n+\frac{3}{4},$$ ……………8 分

即 $b_{n+1}-\frac{1}{2}=b_n^2-b_n+\frac{1}{4}=\left(b_n-\frac{1}{2}\right)^2$.

所以当 $n\geq 2$ 时，

$$b_n=\frac{1}{2}+\left(b_1-\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$ ……………12 分

于是

$$z_{2021}=a_{2021}+b_{2021}\,\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^{2020}}}\right)\mathrm{i}.$$ ……………16 分

**10. （本题满分 20 分）** 在平面直角坐标系中，函数 $y=\frac{x+1}{|x|+1}$ 的图像上有三个不同的点位于直线 $l$ 上，且这三点的横坐标之和为 $0$．求 $l$ 的斜率的取值范围．

**解**：当 $x\geq 0$ 时，$y=1$；当 $x<0$ 时，$y=\frac{x+1}{1-x}$ 关于 $x$ 严格递增且小于 $1$．

设直线 $l: y=kx+b$，则条件等价于方程

$$kx+b=\frac{x+1}{|x|+1} \qquad ①$$

有三个不同的实数解 $x_1,x_2,x_3\ (x_1<x_2<x_3)$，满足 $x_1+x_2+x_3=0$．

首先有 $k\neq 0$（否则，$l$ 只能是 $y=1$，但此时 $l$ 与函数 $y=\frac{x+1}{|x|+1}$ 图像的任意三个公共点的横坐标之和必大于 $0$，不合题意）． ……………5 分

当 $x<0$ 时，方程①可整理为

$$kx^2-(k-b-1)x+1-b=0, \qquad ②$$

至多两个负数解． ……………10 分

当 $x\geq 0$ 时，方程①即为

$$kx+b=1, \qquad ③$$

至多一个非负解．

这表明方程②有两个不同的负数解 $x_1,x_2$，其中 $x_1+x_2=\frac{k-b-1}{k}$，方程③有非负解 $x_3=\frac{1-b}{k}$．由 $x_1+x_2+x_3=0$，可知 $k=2b$．

进而有 $x_3=\frac{1-b}{2b}$，由 $x_3\geq 0$ 得 $0<b\leq 1$． ……………15 分

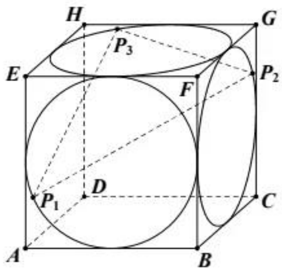
方程②变为 $2bx^2+(1-b)x+1-b=0$，由判别式

$$(1-b)^2-4\cdot 2b(1-b)=(1-b)(1-9b)>0,$$

并结合 $0<b\leq 1$，可知 $0<b<\frac{1}{9}$（经检验，此时 $x_1,x_2$ 确实为负数，符合题意）．

综上，$l$ 的斜率 $k(=2b)$ 的取值范围是 $0<k<\frac{2}{9}$． ……………20 分

**11. （本题满分 20 分）**如图，正方体 $ABCD-EFGH$ 的棱长为2，在正方形 $ABFE$ 的内切圆上任取一点 $P_1$，在正方形 $BCGF$ 的内切圆上任取一点 $P_2$，在正方形 $EFGH$ 的内切圆上任取一点 $P_3$．求 $|P_1P_2|+|P_2P_3|+|P_3P_1|$ 的最小值与最大值．




**解：**以正方体的中心为原点，$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DH}$ 的方向分别为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的正方向，建立空间直角坐标系．

根据条件，可设 $P_1(1,\cos\alpha_1,\sin\alpha_1),\ P_2(\sin\alpha_2,1,\cos\alpha_2),\ P_3(\cos\alpha_3,\sin\alpha_3,1)$．

约定 $P_4=P_1,\ \alpha_4=\alpha_1$．记 $d_i=|P_iP_{i+1}|(i=1,2,3)$，则

$$d_i^2=(1-\sin\alpha_{i+1})^2+(1-\cos\alpha_i)^2+(\sin\alpha_i-\cos\alpha_{i+1})^2\,. \qquad ①$$

……………5 分

记 $f=|P_1P_2|+|P_2P_3|+|P_3P_1|$．

先求 $f$ 的最小值．对 $i=1,2,3$，根据①与平均值不等式得

$$d_i^2\ge(1-\sin\alpha_{i+1})^2+(1-\cos\alpha_i)^2\ge\frac{1}{2}\left((1-\sin\alpha_{i+1})+(1-\cos\alpha_i)\right)^2,$$

故 $d_i\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-\sin\alpha_{i+1}-\cos\alpha_i)$．于是

$$f=d_1+d_2+d_3\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{3}(2-\sin\alpha_{i+1}-\cos\alpha_i)=3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{3}(\sin\alpha_i+\cos\alpha_i)$$

$$=3\sqrt{2}-\sum_{i=1}^{3}\sin\left(\alpha_i+\frac{\pi}{4}\right)\ge3\sqrt{2}-3\,.$$

当 $\alpha_i=\dfrac{\pi}{4}(i=1,2,3)$ 时，$f$ 可取到最小值 $3\sqrt{2}-3$．……………10 分

再求 $f$ 的最大值．由①知 $d_i^2=4-2\cos\alpha_i-2\sin\alpha_{i+1}-2\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1}$．注意到 $\sin\alpha_i\ge-1,\ \cos\alpha_i\ge-1(i=1,2,3)$，有

$$\sum_{i=1}^{3}d_i^2=12-2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_{i+1}+\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i+\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1}\right)$$

$$=12-2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i+\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_{i+1}+\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1}\right)$$

$$=18-2\sum_{i=1}^{3}(1+\sin\alpha_i)(1+\cos\alpha_{i+1})\le18\,.$$

由柯西不等式知 $f^2\le3(d_1^2+d_2^2+d_3^2)=54$，故 $f\le3\sqrt{6}$．

当 $\alpha_i=\pi(i=1,2,3)$ 时，$f$ 可取到最大值 $3\sqrt{6}$．

综上所述，$f$ 的最小值为 $3\sqrt{2}-3$，最大值为 $3\sqrt{6}$．……………20 分