# 盐城市、南京市 2022-2023 学年度第一学期期末调研测试

## 高三数学

**注意事项：**

1．本试卷考试时间为 120 分钟，试卷满分 150 分，考试形式闭卷.

2．本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分.

3．答题前，务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

**一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1．“$a_3+a_9=2a_6$”是“数列$\{a_n\}$为等差数列”的

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】“$a_3+a_9=2a_6$”不能得到$\{a_n\}$为等差数列，不充分.

“$\{a_n\}$是等差数列”一定有“$a_3+a_9=2a_6$”，必要，选 B.

2．若复数$z$满足$|z-1|\le 2$，则复数$z$在复平面内对应点组成图形的面积为

A．$\pi$　　B．$2\pi$　　C．$3\pi$　　D．$4\pi$

【答案】D

【解析】$z=x+yi$，$|z-1|\le 2$，则$|x-1+yi|\le 2$，即$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le 2$，

即$(x-1)^2+y^2\le 4$，$r=2$，$S=4\pi$，选 D.

3．已知集合$A=\left\{x\,|\,\dfrac{x-1}{x-a}<0\right\}$.若$A\cap \mathbf{N}^*=\varnothing$，则实数$a$的取值范围是

A．$\{1\}$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$[1,2]$　　D．$(-\infty,2]$

【答案】D

【解析】$a=1$时，$A=\varnothing$，满足条件.

$a>1$时，$A=\{x|1<x<a\}$，$A\cap\mathbf{N}^*=\varnothing$，则$1<a\le 2$；

$a<1$时，$A=\{x|a<x<1\}$，$A\cap\mathbf{N}^*=\varnothing$，则$a<1$.

综上：$a\le 2$，选D.

4．把5个相同的小球分给3个小朋友，使每个小朋友都能分到小球的分法有

A．4种　　B．6种　　C．21种　　D．35种

【答案】B

【解析】挡板法：5个小球4个空格，插入2个挡板，$C_4^2=6$，选B.

5．某研究性学习小组发现，由双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两渐近线所成的角可求离心率$e$的大小，联想到反比例函数$y=\dfrac{k}{x}(k\ne 0)$的图象也是双曲线，据此可进一步推断双曲线$y=\dfrac{5}{x}$的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．5

【答案】A

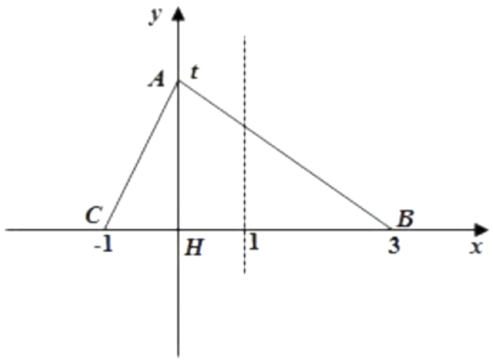
【解析】双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的渐近线：$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，$y=\dfrac{b}{a}x$斜率$\dfrac{b}{a}$，倾斜角为$\theta$，两渐近线夹角为$2\theta$，$y=\dfrac{5}{x}$两渐近线夹角为$\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{2}$，选A.

6．$\triangle ABC$中，$AH$为$BC$边上的高且$\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{HC}$，动点$P$满足$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$，则点$P$的轨迹一定过$\triangle ABC$的

A．外心　　B．内心　　C．垂心　　D．重心

【答案】A

【解析】如图建系，设$P(x,y)$




$\overrightarrow{AP}=(x,y-t)$，$\overrightarrow{BC}=(-4,0)$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=-4x$，$\overrightarrow{BC}^2=16$，$-4x=-4$，$\therefore x=1$，

$P$在$BC$的垂直平分线上，$P$一定过外心.

7．若函数$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$满足$f(1-x)+f(1+x)=0$对一切实数$x$恒成立，则不等式$f'(2x+3)<f'(x-1)$的解集为

A．$(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,-4)$　　C．$(-4,0)$　　D．$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

**【答案】C**

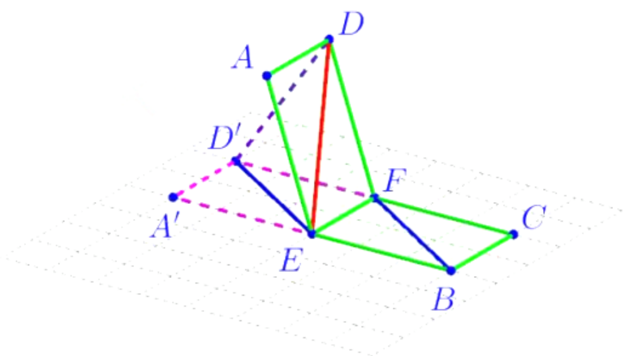
**【解析】** $f(1-x)+f(1+x)=0$，则$f(x)$关于$(1,0)$对称，$f'(x)=3x^2+2bx+c$，

$f''(x)=6x+2b$，则$6+2b=0$，$b=-3$. $f'(x)=3x^2-6x+c$，

$f'(2x+3)<f'(x-1)$，则$3(2x+3)^2-6(2x+3)<3(x-1)^2-6(x-1)$，

$-4<x<0$，选C.

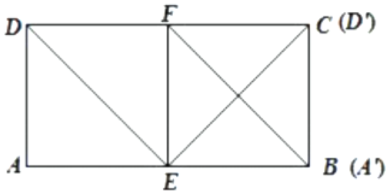
8．四边形$ABCD$是矩形，$AB=3AD$，点$E,F$分别是$AB,CD$的中点，将四边形$AEFD$绕$EF$旋转至与四边形$BEFC$重合，则直线$ED,BF$所成角$\alpha$在旋转过程中




A．逐步变大　　B．逐步变小　　C．先变小后变大　D．先变大后变小

**【答案】D**

**【解析】方法一：**未开始旋转时两直线平行夹角$0^\circ$.

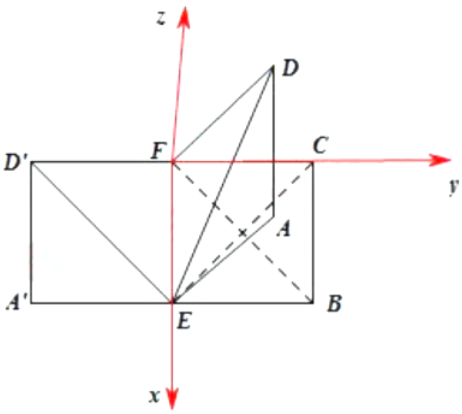



设$AD=1$，则$AB=3$，$DE=CE=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$\cos\angle DEC=\dfrac{\frac{13}{4}+\frac{13}{4}-9}{2\times\frac{13}{4}}<0$，

$\therefore\angle DEC$为钝角，两直线夹角范围为$[0^\circ,90^\circ]$，

$\therefore$旋转过程一定是先变大到$90^\circ$后又变小的锤子数学过程.

**方法二：**如图建系，设$\angle DFD'=\theta,\theta\in[0,\pi]$，设$AD=2,AB=6$，




$\therefore E(2,0,0)$，$D(0,-3\cos\theta,3\sin\theta)$，$B(2,3,0)$，$F(0,0,0)$，

$\therefore\overrightarrow{ED}=(-2,-3\cos\theta,3\sin\theta)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,-3,0)$，

$ED,BF$所成角为$\alpha$，$\therefore\cos\alpha=\left|\dfrac{4+9\cos\theta}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}\right|=\left|\dfrac{4+9\cos\theta}{13}\right|$，

设$\cos\theta_0=-\dfrac{4}{9}$，当$\theta\in[0,\theta_0]$时，$\alpha$逐渐增大；

当$\theta\in(\theta_0,\pi]$时，$\alpha$逐渐减小.选 D.

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9．若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则下列说法正确的有

A．$P(X<\mu+\sigma)=P(X>\mu-\sigma)$

B．$P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)<P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)$

C．$P(X<\mu+\sigma)$不随$\mu,\sigma$的变化而变化

D．$P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)$随$\mu,\sigma$得变化而变化

【答案】AC

【解析】$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P(X<\mu+\sigma)=P(X>\mu-\sigma)$，A 对.

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)=P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)$，B 错.

$P(X<\mu+\sigma)$为定值不改变，C 对.

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)$为定值不改变，D 错.

10．已知函数$f(x)=3\sin x-4\cos x$.若$f(\alpha),f(\beta)$分别为$f(x)$的极大值与极小值，则

A．$\tan\alpha=-\tan\beta$　　B．$\tan\alpha=\tan\beta$

C．$\sin\alpha=-\sin\beta$　　D．$\cos\alpha=-\cos\beta$

【答案】BCD

【解析】$f(x)=5\left(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x\right)=5\sin(x-\varphi)$，其中$\cos\varphi=\frac{3}{5},\sin\varphi=\frac{4}{5}$，

当$x-\varphi=\frac{\pi}{2}$时，取极大值，即$\alpha=\varphi+\frac{\pi}{2}$；

当$x-\varphi=-\frac{\pi}{2}$时取极小值，即$\beta=\varphi-\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\tan\beta=\tan\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\varphi-\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\tan\alpha$，A 错，B 对.

$\sin\alpha=-\sin\beta$，C 对，$\cos\alpha=-\cos\beta$，D 对，选 BCD.

11．已知直线$l$的方程为$(a^2-1)x-2ay+2a^2+2=0,a\in\mathbf{R}$，$O$为原点，则

A．若$OP\le 2$，则点$P$一定不在直线$l$上

B．若点$P$在直线$l$上，则$OP\ge 2$

C．直线$l$上存在定点$P$

D．存在无数个点$P$总不在直线$l$上

【答案】BD

【解析】$O$到$l$的距离$d=\dfrac{2(a^2+1)}{\sqrt{(a^2-1)^2+4a^2}}=2$，$OP\le 2$则$P$有可能在直线上，A错.

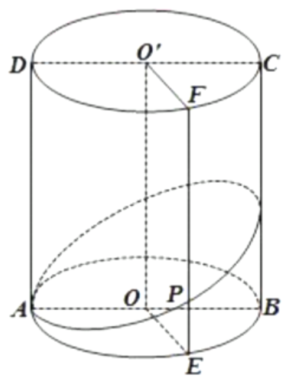
点$P$在直线$l$上一定有$OP\ge 2$，B对.

$(a^2-1)x-2ay+2a^2+2=0$，$a^2(x+2)-a\cdot 2y+2-x=0$，

$\begin{cases}x+2=0\\2y=0\\2-x=0\end{cases}$ 无解，直线$l$不过定点，一定存在无数个点$P$总不在直线$l$上，D对.

选BD.

12．如图，圆柱$OO'$的底面半径为1，高为2，矩形$ABCD$是其轴截面，过点$A$的平面$\alpha$与圆柱底面所成的锐二面角为$\theta$，平面$\alpha$截圆柱侧面所得的曲线为椭圆$\Omega$，截母线$EF$得点$P$，则




A．椭圆$\Omega$的短轴长为2　　B．$\tan\theta$的最大值为2

C．椭圆$\Omega$的离心率的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$EP=(1-\cos\angle AOE)\tan\theta$

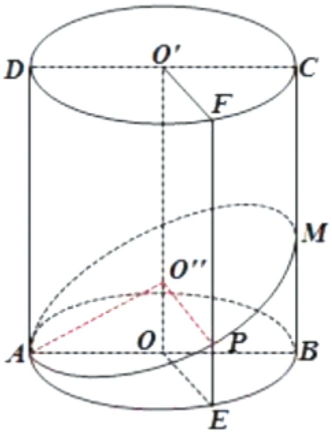
【答案】ACD

【解析】对于A，显然短轴长为圆柱底面直径2，A正确；

对于B，$(\tan\theta)_{\max}=\dfrac{BC}{AB}=1$，B错.

对于 C，椭圆离心率$e=\sin\theta\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，C 正确.

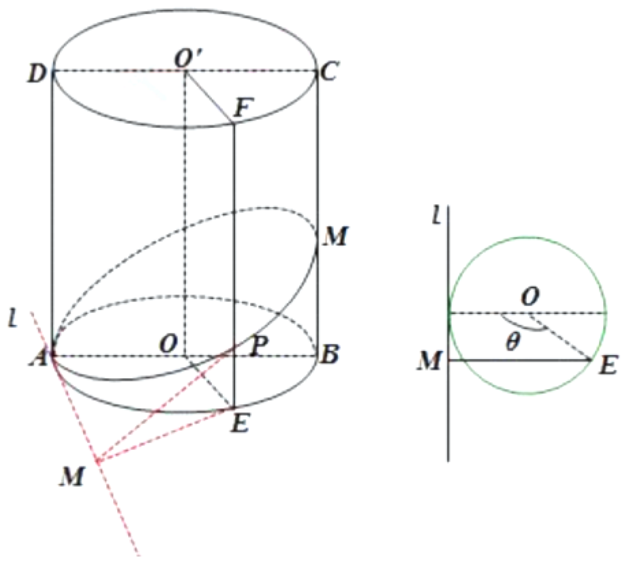
对于 D，设椭圆中心为$O''$，$\therefore OO''=\tan\theta$，D 正确.




选：ACD.

对于 D 的评析说明：锤子数学设椭圆与底面交线为$l$，过$E$作$EM\perp l$于点$M$，连接$PM$，则$\angle PME=\theta$，$\therefore PE=EM\cdot\tan\theta$，而$EM=1-\cos\angle AOE$，

$\therefore EP=(1-\cos\angle AOE)\tan\theta$.



**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13．$\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 $x^3$ 的系数为__________.

【答案】80

【解析】$\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^5$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(2x)^{5-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=\mathrm{C}_5^r2^{5-r}x^{5-r-r}$，

$r=1$ 时，$T_2=\mathrm{C}_5^1 2^4x^3=80x^3$，$\therefore x^3$ 的系数为 $80$.

14．设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，则使 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数的 $\omega$ 的值可以为__________（写出一个即可）.

**【答案】在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$ 中任取一个数如 $\dfrac{1}{4}$ 即可**

【解析】$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{3}<\omega x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\nearrow$，

$\therefore\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{3}\geq-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，$\therefore 0<\omega\leq\dfrac{1}{3}$，在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$ 中任取一个数如 $\dfrac{1}{4}$ 即可.

15．在概率论中常用散度描述两个概率分布的差异.若离散型随机变量 $X,Y$ 的取值集合均为 $\{0,1,2,3,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $X,Y$ 的散度 $D(X\|Y)=\sum_{i=0}^{n}P(X=i)\ln\frac{P(X=i)}{P(Y=i)}$.若 $X,Y$ 的概率分布如下表所示，其中 $0<p<1$，则 $D(X\|Y)$ 的取值范围是________.

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $1-p$ | $p$ |

【答案】$[0,+\infty)$

【解析】$D(X\|Y)=P(X=0)\ln\frac{P(X=0)}{P(Y=0)}+P(X=1)\ln\frac{P(X=1)}{P(Y=1)}$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{2}}{1-p}+\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{2}}{p}=\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{4}}{p(1-p)}$，$p(1-p)\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，

$\therefore\frac{\frac{1}{4}}{p(1-p)}\in[1,+\infty)$，$\therefore D(X\|Y)\geq 0$.

16．已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}a_{\frac{n+1}{2}},n=2k-1,\\ \sqrt{a_{n+1}},n=2k,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{N}^*$，$\{b_n\}$ 是公比为 $q$ 的等比数列，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=$________（用 $q$ 表示）；若 $a_2+b_2=24$，则 $a_5=$________.

【答案】$q^2$；1024

【解析】$n$ 为奇数时，$b_n=a_{\frac{n+1}{2}}$，$\therefore b_{2n+1}=a_{n+1}$，$b_{2n-1}=a_n$，

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}}=q^2$，$b_1=a_1,b_2=\sqrt{a_3},b_3=a_2$，$b_2^2=b_1b_3$，$\therefore a_3=a_1a_2$.

$\therefore a_2q^2=\frac{a_2}{q^2}\cdot a_2$，$\therefore a_2=q^4$.

$b_2=\sqrt{a_3}=\sqrt{a_2q^2}=q^3$，$q^4+q^3=24$，$q=2$，$a_5=a_2q^6=q^{10}=1024$.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（10 分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n,n\in\mathbf{N}^*$.

（1）判断数列$\{a_n-2n-1\}$是否是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\dfrac{(2n-1)2^n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

**【解析】**

（1）$a_{n+1}-2(n+1)-1=3a_n-4n-2n-3=3(a_n-2n-1)$，

而$a_1-2-1=a_1-3=0$，$\therefore\{a_n-2n-1\}$为常数列，各项均为0，它不是等比数列.

$\therefore a_n-2n-1=0$，$a_n=2n+1$.

（2）$b_n=\dfrac{(2n-1)\cdot 2^n}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{2^{n+1}}{2n+3}-\dfrac{2^n}{2n+1}$

$\therefore S_n=\dfrac{2^2}{5}-\dfrac{2^1}{3}+\dfrac{2^3}{7}-\dfrac{2^2}{5}+\cdots+\dfrac{2^{n+1}}{2n+3}-\dfrac{2^n}{2n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{2n+3}-\dfrac{2}{3}$.

18.（12 分）在$\triangle ABC$中，$AC=2$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$P$为$\triangle ABC$内的一点，满足$AP\perp CP$，$\angle APB=\dfrac{2\pi}{3}$.

（1）若$AP=PC$，求$\triangle ABC$的面积；

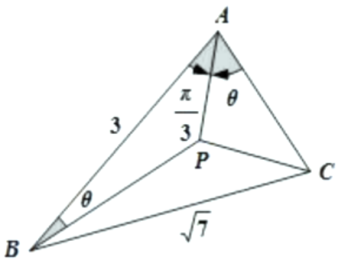
（2）若$BC=\sqrt{7}$，求$AP$.

**【解析】**

（1）$\because AP=PC,\angle APC=90^\circ$，$\therefore AP=\sqrt{2}$，$\angle PAC=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle BAP=\dfrac{\pi}{12}$，

$\therefore\angle ABP=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$，在$\triangle ABP$中，$\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow AB=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$.




（2）$\angle BPC=\dfrac{5\pi}{6}$，在$\triangle BAC$中，由余弦定理$\Rightarrow AB^2+4-2AB\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=7$

$\Rightarrow AB^2-2AB-3=0$，$(AB-3)(AB+1)=0$，$AB=3$，

设$\angle PAC=\theta$，$\therefore\angle BAP=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，$\angle ABP=\theta$，

在$\triangle ABP$中，$\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{AP}{\sin\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore AP=\sqrt{3}$.

19．（12分）为深入贯彻党的教育方针，全面落实《中共中央国务院关于全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》，某校从2022年起积极推进劳动课程改革，先后开发开设了具有地方特色的家政、烹饪、手工、园艺、非物质文化遗产等劳动实践类校本课程.为调研学生对新开设劳动课程的满意度并不断改进劳动教育，该校从2022年1月到10月两个月从全校3000名学生中随机抽取150名学生进行问卷调查，统计数据如下表：

| 月份$x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 满意人数$y$ | 80 | 95 | 100 | 105 | 120 |

（1）由表中看出，可用线性回归模型拟合满意人数$y$与月份$x$之间的关系，求$y$关于$x$的回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测12月份该校全体学生中对劳动课程的满意人数；

（2）10月份时，该校为进一步深化劳动教育改革，了解不同性别的学生对劳动课程是否满意，经调研得如下统计表：

| | 满意 | 不满意 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男生 | 65 | 10 | 75 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 女生 | 55 | 20 | 75 |
| 合计 | 120 | 30 | 150 |

请根据上表判断是否有95%的把握认为该校的学生性别与对劳动课程是否满意有关？

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

| $P(K^2\geq k)$ | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

**【解析】**

（1）$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=2\times80+4\times95+6\times100+8\times105+10\times120=3180$，

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=4+16+36+64+100=220$，$\overline{x}=\dfrac{2+4+6+8+10}{5}=6$，

$\overline{y}=\dfrac{80+95+100+105+120}{5}=100$，

$\therefore\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{3180-5\times6\times100}{220-5\times36}=4.5$，

$\therefore\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=100-4.5\times6=73$，$\therefore\hat{y}=4.5x+73$，

$\therefore$第12月份该校全体学生中对劳动课程满意人数为：$4.5\times12+73=127$人.

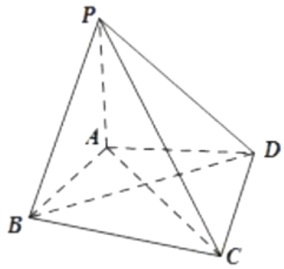
（2）$K^2=\dfrac{150\times(65\times20-10\times55)^2}{75\times75\times120\times30}\approx4.167>3.841$，

$\therefore$有95%的把握认为两事件有关.

20.（12分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AB\perp AD$，平面$PAC\perp$平面$PBD$，$AB=AD=AP=2$，四棱锥$P-ABCD$的体积为4.

（1）求证：$BD \perp PC$；

（2）求平面$PAD$与平面$PCD$所成锐二面角的余弦值.




**【解析】**

（1）证明：$\because PA \perp$底面$ABCD$，$\therefore PA \perp AB$且$PA \perp AD$，又$\because AB = AD = 2$，

$\therefore PB = PD$，设$AC$与$BD$交于$O$，过$C$作$CM \perp PO$于点 $M$

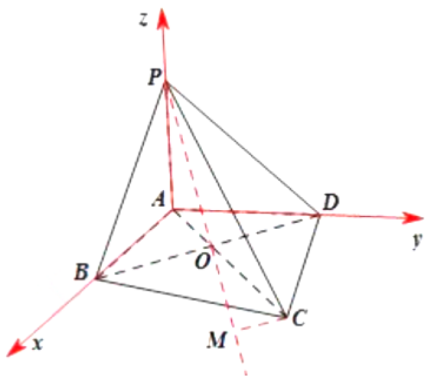
$\because$平面$PAC \perp$平面$PBD$，平面$PAC \cap$平面$PBD = PO$，$\therefore CM \perp$平面$PBD$，

$\therefore CM \perp BD$，又$\because PA \perp BD$，$CM$与$PA$相交，$\therefore BD \perp$平面$PAC$，

$\therefore BD \perp PC$，证毕！

（2）由（1）知$BD \perp AC$，$\therefore V_{四棱锥P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4 \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}$，

如图建系，$\therefore P(0,0,2), D(0,2,0), C(3,3,0)$，




$\overrightarrow{PD} = (0,2,-2), \overrightarrow{DC} = (3,1,0)$，

设平面$PCD$的一个法向量$\overrightarrow{n_1} = (x_0, y_0, z_0)$，

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_0 - 2z_0 = 0 \\ 3x_0 + y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (-1,3,3)，$$

而平面$PAD$的一个法向量$\overrightarrow{n_2} = (1,0,0)$，

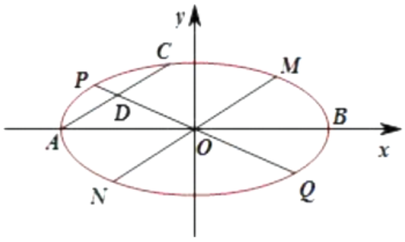
设平面$PAD$与平面$PCD$所成锐二面角为$\theta$，

$$\therefore \cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{19}\cdot 1}=\frac{\sqrt{19}}{19}.$$

21．（12分）如图，已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右顶点分别为$A,B$，点$C$是椭圆上异于$A,B$的动点，过原点$O$平行于$AC$的直线与椭圆交于点$M,N$，$AC$的中点为点$D$，直线$OD$与椭圆交于点$P,Q$，点$P,C,M$在$x$轴的上方.

（1）当$AC=\sqrt{5}$时，求$\cos\angle POM$；

（2）求$PQ\cdot MN$的最大值.




**【解析】**

（1）设$C(x_0,y_0),A(-2,0)$，$\therefore AC=\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=\sqrt{5}$且$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，

解得$C(0,1)$，$\therefore k_{AC}=\frac{1}{2}$，锤子数学$MN$方程：$y=\frac{1}{2}x$，$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}\Rightarrow M\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$D\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，$k_{OD}=-\frac{1}{2}$，$\therefore PQ$方程：$y=-\frac{1}{2}x$，

$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}\Rightarrow P\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\therefore \overrightarrow{OP}=\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{OM}=\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$$\cos\angle POM=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\frac{-2+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}}=-\frac{3}{5}.$$

（2）**方法一**

由网课“觉醒课程 解几共轭直径推论 12”知：$OP^2+OM^2$ 为定值（证明略）

$OP^2+OM^2=4+1=5$，即 $PQ^2+MN^2=20$，

$\therefore PQ\cdot MN\le\dfrac{PQ^2+MN^2}{2}=10$（一步结束）.

**方法二：**

设 $MN$ 方程为 $y=kx$，$k=k_{AC}\in(0,+\infty)$，且 $k_{OD}\cdot k_{AC}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow k_{OD}=-\dfrac{1}{4k}$，

$\begin{cases}y=kx\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{4}+k^2\right)x^2=1$，$x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{4k^2+1}}$，

$\therefore|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot2\sqrt{\dfrac{4}{4k^2+1}}=4\sqrt{\dfrac{1+k^2}{4k^2+1}}$，

将 $|MN|$ 中的 $k$ 换成 $-\dfrac{1}{4k}\Rightarrow|PQ|=4\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{1}{16k^2}}{\dfrac{1}{4k^2}+1}}=4\sqrt{\dfrac{16k^2+1}{16k^2+4}}=2\sqrt{\dfrac{16k^2+1}{4k^2+1}}$

$\therefore PQ\cdot MN=8\sqrt{\dfrac{(1+k^2)(16k^2+1)}{(4k^2+1)^2}}$，令 $4k^2+1=m,m>1$，

$\therefore PQ\cdot MN=8\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{m-1}{4}+1\right)(4m-3)}{m^2}}=4\sqrt{\dfrac{(m+3)(4m-3)}{m^2}}$

$=4\sqrt{-\dfrac{9}{m^2}+\dfrac{9}{m}+4}\le4\sqrt{\dfrac{4(-9)\cdot4-81}{-36}}=10$，

当且仅当 $m=2,k=\dfrac{1}{2}$ 时取“$=$”.

22．（12分）已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

（1）当 $x>-1$ 时，求函数 $g(x)=f(x)+x^2-1$ 的最小值；

（2）已知 $x_1\neq x_2$，$f(x_1)=f(x_2)=t$，求证：$|x_1-x_2|>2\sqrt{1-t}$.

**【解析】**

（1）$g(x)=\dfrac{x+1}{e^x}+x^2-1$，$g'(x)=\dfrac{e^x-e^x(x+1)}{e^{2x}}+2x=\dfrac{-x}{e^x}+2x=x\left(2-\dfrac{1}{e^x}\right)$，

令 $g'(x)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$，

当 $-1<x<-\ln 2$ 时，$g'(x)>0, g(x)\nearrow$；当 $-\ln 2<x<0$ 时，$g'(x)<0, g(x)\searrow$；

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0, g(x)\nearrow$，

而 $g(-1)=0, g(0)=0$，$\therefore g(x)_{\min}=0$.

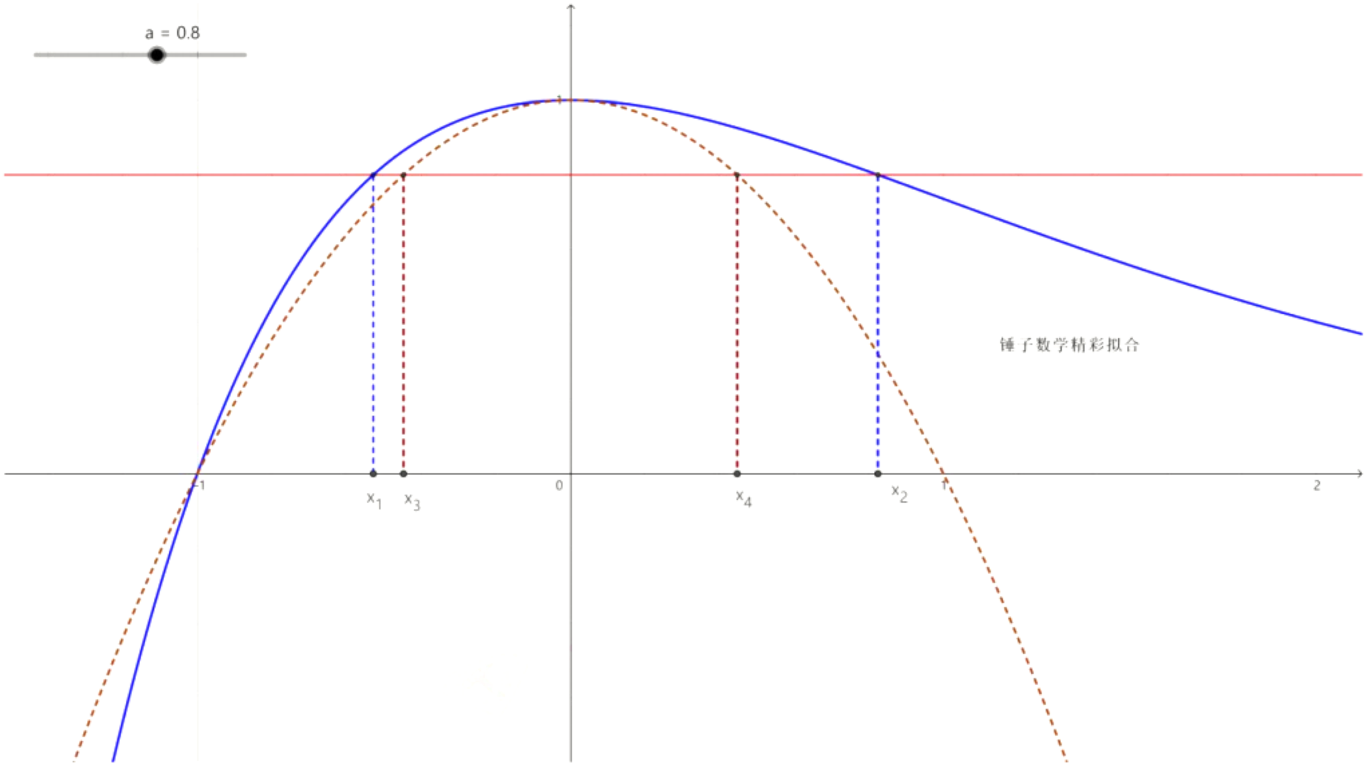
（2）**方法一：**

可直接构造支撑曲线 $g(x)=-x^2+1$，

易证 $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ 时，则 $f(x)>g(x)$，即 $\dfrac{x+1}{e^x}>-x^2+1$，这是显然的.

则设 $y=t$ 与 $f(x)$ 交于 $x_1,x_2$，锤子数学与 $g(x)$ 交于 $x_3,x_4$，

则 $x_1<x_3,x_2>x_4$，$\therefore x_2-x_1>x_4-x_3=2\sqrt{1-t}$，证毕！.




**方法二：**

$f'(x)=\dfrac{e^x-e^x(x+1)}{e^{2x}}=\dfrac{-x}{e^x}=0\Rightarrow x=0$ ，

$f(x)$在$(-\infty,0)$上↗；$(0,+\infty)$上↘，

且$x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$ ；$x\to+\infty$时，$f(x)\to 0$

$f(0)=1$ ，$\because f(x_1)=f(x_2)=t$ ，$\therefore 0<t<1$ ，$-1<x_1<0<x_2$（这里不妨设$x_1<x_2$ ）

由（1）知$\dfrac{x+1}{e^x}+x^2-1\geq 0$对$\forall x\in(-1,+\infty)$恒成立（当且仅当$x=0$时取“$=$”）

$\therefore \dfrac{x_1+1}{e^{x_1}}>1-x_1^2\Rightarrow 1-x_1^2<t\Rightarrow x_1<-\sqrt{1-t}$ ，

$\dfrac{x_2+1}{e^{x_2}}>1-x_2^2\Rightarrow 1-x_2^2<t\Rightarrow x_2>\sqrt{1-t}\Rightarrow |x_1-x_2|=x_2-x_1>2\sqrt{1-t}$

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。