湖南师大附中2021级高三摸底考试试卷

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	A	C	A	C	D	AD	ACD	BCD	ACD

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. C(原题)

2. B 【解析】设 $z=a+bi$，则根据题意 $|a+bi|=|a+(b+2)i|$，有 $a^2+b^2=a^2+(b+2)^2$，得到 $b=-1$，所以 z 的虚部是 -1. 故选 B.

3. A

4. A 【解析】设土地租金成本和运输成本分别为 W_1 万元和 W_2 万元，分拣中心和货运枢纽相距 s km，则根据题意易知 $W_1=\frac{20}{s}$，$W_2=\frac{4}{5}s$，故 $W_1+W_2=\frac{20}{s}+\frac{4}{5}s\geqslant 2\sqrt{\frac{20}{s}\cdot\frac{4}{5}s}=8$，当且仅当 $s=5$ 时取等号. 故选 A.

5. C 【解析】A 项，由于 $\angle ABC=\angle BCD=135°$，明显有 $AB\perp CD$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，A 正确；
B 项，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=0$，B 正确；
C 项，$\overrightarrow{EG}$和$\overrightarrow{HD}$方向相反，但长度不等，因此不是一对相反向量，C 错误；
D 项，$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FG}|=|\overrightarrow{CD}|=a$，D 正确. 故选 C.

6. A(原题) 【解析】$\cos\left(2\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(-\pi+2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$
$=-\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\left(1-2\times\frac{2}{9}\right)=-\frac{5}{9}$. 故选 A.

7. C 【解析】由 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，可知 $S_1+3=a_1+3$，$S_2+3=2a_1+6$，$S_3+3=3a_1+12$.
若 S_2+3 是 S_1+3 和 S_3+3 的等比中项，则 $(2a_1+6)^2=(a_1+3)(3a_1+12)$，解得 $a_1=0$ 或 $a_1=-3$（舍去，因为此时 $S_1+3=S_2+3=0$），可见“$a_1=0$”是“S_2+3 是 S_1+3 和 S_3+3 的等比中项”的充要条件. 故选 C.

8. D 【解析】函数 $f(x)=x^2+2^x+2^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=x^2+2^{-x}+2^x=f(x)$，
所以 $f(x)$ 为偶函数，又当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2$ 是增函数，
令 $h(x)=2^x+2^{-x}$，
任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，
则 $h(x_1)-h(x_2)=2^{x_1}+2^{-x_1}-(2^{x_2}+2^{-x_2})=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}}\right)$，
因为 $x_1>x_2$，$x_1,x_2\in[0,+\infty)$，
所以 $2^{x_1}-2^{x_2}>0$，$2^{x_1+x_2}-1>0$，
所以 $h(x_1)-h(x_2)>0$，
所以 $h(x)=2^x+2^{-x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，即 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，
所以不等式 $f(1-ax)<f(2+x^2)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，
转化为 $|1-ax|<2+x^2$，即 $-2-x^2<1-ax<2+x^2$，
所以 $x^2+ax+1>0$ 和 $x^2-ax+3>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，
①若 $x^2+ax+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\Delta_1=a^2-4<0$，解得 $-2<a<2$；
②若 $x^2-ax+3>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\Delta_2=a^2-12<0$，解得 $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$；
综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-2,2)$.
故选：D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. AD 【解析】由图表可知，2018—2022 这 5 年我国社会物流总费用逐年增长，2021 年增长的最多，且增长为 $16.7-14.9=1.8$ 万亿元，故 A 正确；
因为 $6\times 70\%=4.2$，则 70%分位数为第 5 个，即为 16.7，所以这 6 年我国社会物流总费用的 70%分位数为 16.7 万亿元，故 B 错误；
由图表可知，2017—2022 这 6 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率的极差为 $14.8\%-14.6\%=0.2\%$，故 C 错误；
由图表可知，2022 年我国的 GDP 为 $17.8\div 14.7\%\approx 121.1$ 万亿元，故 D 正确.

故选：AD.

10. ACD(此题为原题，见一轮复习资料 6.3 等比数列的练习题)

【解析】由$\{S_n\}$是等差数列，可得 $2(a_1+a_2)=a_1+a_1+a_2+a_3$，$\therefore a_2=a_3$，

$\because\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\therefore a_2=a_2q$，可得 $q=1$，$\therefore a_n=a_1>0$，

$\therefore a_n+S_n=(n+1)a_1$，$\therefore$数列$\{a_n+S_n\}$是等差数列，因此 A 正确；

$\because a_n^2=a_1^2$，$\therefore\{a_n^2\}$是常数列，为等差数列，因此 C 正确；

$\because \dfrac{S_n}{n}=a_1>0$，$\therefore\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等比数列，因此 D 正确；

$\because a_nS_n=na_1^2$，$\therefore\{a_n\cdot S_n\}$不是等比数列，因此 B 不正确. 故答案为 ACD.

11. BCD 【解析】由题可得 $g(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right)$时，$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，故函数 $g(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right)$上不单调，故 A 错误；

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时，$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，$g(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-2,1]$，故 B 正确；

当 $x=\dfrac{5\pi}{6}$时，$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$，故函数 $g(x)$的图象关于直线 $x=\dfrac{5\pi}{6}$对称，故 C 正确；

因为 $g(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以 $g'(x)=4\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

若直线 $y=2\sqrt{3}x-1$ 为曲线 $y=g(x)$的切线，则由 $g'(x)=4\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$，可得：$x=k\pi$ 或 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，

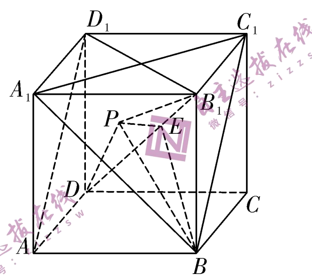
当 $x=k\pi$ 时，$g(x)=-1$，于是 $2\sqrt{3}\times k\pi-1=-1$，解得：$k=0$，

当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$时，$g(x)=1$，于是 $2\sqrt{3}\times\left(k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)-1=1$，此时无解.

综上，直线 $y=2\sqrt{3}x-1$ 为曲线 $y=g(x)$的切线. 故 D 正确.

故答案为 BCD.

12. ACD 【解析】对于 A 选项，连接 B_1D_1，$\because$四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，$\therefore B_1D_1\perp A_1C_1$，



$\because DD_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1C_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，$\therefore A_1C_1\perp DD_1$，

$\because B_1D_1\cap DD_1=D_1$，$\therefore A_1C_1\perp$平面 B_1DD_1，

$\because B_1D\subset$平面 B_1DD_1，$\therefore B_1D\perp A_1C_1$，

同理可证 $B_1D\perp A_1B$，$\because A_1B\cap A_1C_1=A_1$，$\therefore B_1D\perp$平面 A_1BC_1，

$\because PB\subset$平面 A_1BC_1，$\therefore PB\perp B_1D$，A 对；

对于 B 选项，设 $B_1D\cap$平面 $A_1BC_1=E$，

$\because A_1B=BC_1=A_1C_1=3\sqrt{2}$，$A_1B_1=BB_1=B_1C_1$，$\therefore$三棱锥 B_1-A_1BC_1 为正三棱锥，

$\therefore B_1E=\sqrt{BB_1^2-BE^2}=\sqrt{3}$，$\because B_1D=3\sqrt{3}$，$\therefore DE=B_1D-B_1E=2\sqrt{3}$，

$\because B_1D\perp$平面 A_1BC_1，$PE\subset$平面 A_1BC_1，$\therefore PE\perp B_1D$，即 $B_1E\perp PE$，$DE\perp PE$，

$\because PD+PB_1=2+\sqrt{13}$，$\therefore\sqrt{PE^2+12}+\sqrt{PE^2+3}=2+\sqrt{13}$，$\because PE>0$，解得 $PE=1$，

$\because$点 P 的轨迹是半径为 1 的圆，B 错；

对于 C 选项，$\because B_1E\perp$平面 A_1BC_1，$\therefore B_1P$ 与平面 A_1BC_1 所成的角为$\angle B_1PE$，

且 $\tan\angle B_1PE=\dfrac{B_1E}{PE}=\sqrt{3}$，$\because 0\leqslant\angle B_1PE\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，故$\angle B_1PE=\dfrac{\pi}{3}$，C 对；

对于 D 选项，点 E 到直线 BC_1 的距离为$\dfrac{1}{2}BE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$点 P 到直线 BC_1 的距离的最大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}+1$，

$\because B_1E\perp$平面 A_1BC_1，$\therefore$三棱锥 B_1-BPC_1 的高为 B_1E，

$\therefore$三棱锥 $P-BB_1C_1$ 体积的最大值为$\frac{1}{3}\times\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3+\sqrt{6}}{2}$，D 对.

故选：ACD.

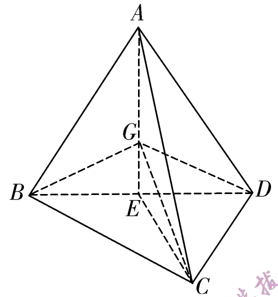
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{2}{3}$

14. $[-1,2]$　**【解析】**由题可知，$x+\frac{y}{4}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{4x}{y}+\frac{y}{4x}\right)\geqslant 2$，当且仅当$\frac{4x}{y}=\frac{y}{4x}$时等号成立，

所以要使不等式 $x+\frac{y}{4}\geqslant m^2-m$ 恒成立，即 $m^2-m\leqslant 2$，解得$-1\leqslant m\leqslant 2$.

15. $\frac{32\pi}{3}$　**【解析】**如图，



取 BD 的中点 E，连接 AE,CE，$\therefore BE=ED=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，设$\triangle ABD$ 的外心为 G，

$\because BC=CD=2,BD=2\sqrt{2},AC=2\sqrt{2}$，$\therefore\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，$\therefore EC=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，$\because\triangle ABD$ 是等边三角形，$\therefore AE\perp BD$，

$AE=\sqrt{6}$，$\therefore GA=GB=GD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，在$\triangle AEC$ 中，$EC^2+AE^2=AC^2$，$\therefore AE\perp EC$，

在$\triangle GEC$ 中，由 $EC^2+GE^2=GC^2$，可得 $GC=\frac{2\sqrt{6}}{3}=GA=GB=GD$，

$\therefore G$ 为外接球的球心，$\therefore$该三棱锥的外接球表面积为 $4\pi\times R^2=\frac{32\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{32\pi}{3}$.

16. $4-\sqrt{13}$　**【解析】**由题可知点 P 的轨迹是以 C 为圆心，1 为半径的圆，

$\because\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP},\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}$，

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CP}^2$，

$\because|\overrightarrow{CP}|=1$，$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=4+\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$，又向量$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$是长度为$\sqrt{13}$的一个向量，

由此可得，点 P 在圆 C 上运动，当$\overrightarrow{CP}$与$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$共线反向时，$\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$取最小值，且这个最小值为$-\sqrt{13}$，

故$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$的最小值为 $4-\sqrt{13}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.**【解析】**(1)$2c\sin A\cos B+2b\sin A\cos C=\sqrt{3}a$，由正弦定理得：

$2\sin C\sin A\cos B+2\sin B\sin A\cos C=\sqrt{3}\sin A$，$\because\sin A>0$，

$\therefore\sin C\cos B+\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\sin A=\sin(B+C)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because c>a$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………………… 5 分

(2)**方法一**：由已知：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$，得 $c=4$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，

$(\overrightarrow{AD})^2=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2=\frac{4}{16}+\frac{9\times 16}{16}+\frac{6\times 2\times 4}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{43}{4}$，

$\therefore AD=\frac{\sqrt{43}}{2}$. ………………………………………………………………………………… 10 分

方法二：由已知：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$，得 $c=4$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=12$，$\therefore a=2\sqrt{3}$.

$\because \overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{DB}$，$\therefore BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

设 $AD=x$，

在$\triangle ABD$ 中，$\cos\angle ADB=\dfrac{x^2+\frac{3}{4}-16}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}x}$；

在$\triangle ADC$ 中，$\cos\angle ADC=\dfrac{x^2+\frac{27}{4}-4}{2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}x}$；

由 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{43}}{2}$.

$\therefore AD=\frac{\sqrt{43}}{2}$. …………………………………………………………………………………… 10 分

18.【**解析**】(1)因为 $x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{2^{n-2}}+\frac{x_n}{2^{n-1}}=\frac{nx_{n+1}}{2^n}$，

用 $n-1$ 替换上式的 n，得 $x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{2^{n-2}}=\frac{(n-1)x_n}{2^{n-1}}(n\geqslant 2)$.

两式作差，即得$\frac{x_n}{2^{n-1}}=\frac{nx_{n+1}}{2^n}-\frac{(n-1)x_n}{2^{n-1}}$，整理后有 $x_{n+1}=2x_n(n\geqslant 2)$. ………………………………… 3 分

在原式中令 $n=1$，得 $2x_1=x_2$，故 $x_{n+1}=2x_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立. ……………………………………… 4 分

而$\{x_n\}$的首项为 1，故 $x_n\neq 0$，所以$\{x_n\}$是公比为 2 的等比数列.

因此$\{x_n\}$的通项公式是 $x_n=2^{n-1}$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $x_{n+1}-x_n=2^{n-1}$，

故 $b_n=\frac{1}{2}(n+n+1)(x_{n+1}-x_n)=(2n+1)\times 2^{n-2}$. ……………………………………………………… 7 分

所以 $S_n=3\times 2^{-1}+5\times 2^0+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-3}+(2n+1)\times 2^{n-2}$.

又 $2S_n=3\times 2^0+5\times 2^1+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-2}+(2n+1)\times 2^{n-1}$，

作差得 $S_n=-3\times 2^{-1}-(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})+(2n+1)\times 2^{n-1}$

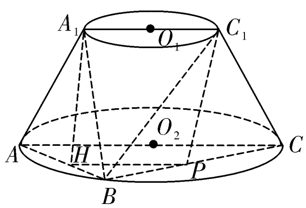
$=-\frac{3}{2}-\frac{2\times(1-2^{n-1})}{1-2}+(2n+1)\times 2^{n-1}$

$=\frac{(2n-1)\times 2^n+1}{2}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

19.【**解析**】(1)取 BC 中点 P，作直线 C_1P 即为所求.

取 AB 中点 H，连接 A_1H，PH，则有 $PH\parallel AC$，$PH=\frac{1}{2}AC$，

如图，在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=2A_1C_1$，所以 $HP\parallel A_1C_1$，$HP=A_1C_1$，



则四边形 A_1C_1PH 为平行四边形，

所以 $C_1P\parallel A_1H$，

又 $A_1H\subset$平面 A_1AB，$C_1P\not\subset$平面 A_1AB，

所以 $C_1P\parallel$平面 A_1AB. ………………………………………………………………………………… 5 分

(2)过点 B 作 $BO'\perp AC$ 于 O'，

在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$，所以该梯形的高 $h=\sqrt{3}$，

所以等腰梯形 A_1ACC_1 的面积为 $S=3\sqrt{3}$，

所以四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S\times BO'=2\sqrt{3}$，解得 $BO'=2$，

所以点 O' 与 O_2 重合，

以 O_2 为原点，$\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2C},\overrightarrow{O_2O_1}$ 方向为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，则

$C(0,2,0),B(2,0,0),A(0,-2,0),A_1(0,-1,\sqrt{3}),C_1(0,1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3}),\overrightarrow{AB}=(2,2,0),\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$.

设平面 A_1AB 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，所以$\begin{cases}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\2x_1+2y_1=0.\end{cases}$

取 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$.

同理可得平面 C_1CB 的法向量为 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，

设平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角为 α，则 $\cos\alpha=\left|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|}\right|=\left|\frac{3-3+1}{\sqrt{3+3+1}\times\sqrt{3+3+1}}\right|=\frac{1}{7}$.

故平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)用事件 A,B,C 分别表示每局比赛"甲获胜","乙获胜"或"平局"，则 $P(A)=\alpha=\frac{1}{2},P(B)=\beta=\frac{1}{3},P(C)=\gamma=\frac{1}{6}$，

记"进行 4 局比赛后甲学员赢得比赛"为事件 N，则事件 N 包括事件 $ABAA,BAAA,ACCA,CACA,CCAA$ 共 5 种，……… 2 分

所以 $P(N)=P(ABAA)+P(BAAA)+P(ACCA)+P(CACA)+P(CCAA)$

$=2P(B)P(A)P(A)P(A)+3P(C)P(C)P(A)P(A)=2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{48}$. …………………… 5 分

(2)因为 $\gamma=0$，所以每局比赛结果仅有"甲获胜"和"乙获胜"，即 $\alpha+\beta=1$，

由题意得 X 的所有可能取值为 2,4,5，则 ………………………………………… 6 分

$P(X=2)=P(AA)+P(BB)=\alpha^2+\beta^2$，

$P(X=4)=P(ABAA)+P(BAAA)+P(ABBB)+P(BABB)=(\alpha\beta+\beta\alpha)\alpha^2+(\alpha\beta+\beta\alpha)\beta^2=2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$，

$P(X=5)=P(ABAB)+P(ABBA)+P(BABA)+P(BAAB)=(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta^2)\cdot 1=4\alpha^2\beta^2$.

所以 X 的分布列为

X	2	4	5
P	$\alpha^2+\beta^2$	$2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$	$4\alpha^2\beta^2$

………………………………………………………………………………………… 8 分

所以 X 的期望 $E(X)=2(\alpha^2+\beta^2)+8\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+20\alpha^2\beta^2$

$=2(1-2\alpha\beta)+8\alpha\beta(1-2\alpha\beta)+20\alpha^2\beta^2=4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2$, ………………………… 9 分

因为 $\alpha+\beta=1\geqslant 2\sqrt{\alpha\beta}$，所以 $\alpha\beta\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 时等号成立，所以 $\alpha\beta\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，

所以 $E(X)=4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2=(2\alpha\beta+1)^2+1\leqslant\left(2\times\frac{1}{4}+1\right)^2+1=\frac{13}{4}$，

故 $E(X)$ 的最大值为 $\frac{13}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)因为 $a_n(a_{n+1}^2-1)=2(a_n^2-1)a_{n+1}$，且 $a_n>0$，

$\therefore\frac{a_{n+1}^2-1}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{a_n^2-1}{a_n}$，即 $a_{n+1}-\frac{1}{a_{n+1}}=2\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)$，

$\therefore b_{n+1}=2b_n$，又 $b_1=a_1-\frac{1}{a_1}=\frac{8}{3}\neq 0$，…………………………………………… 2 分

$\therefore\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{8}{3}$，公比为 2 的等比数列，$\therefore b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=\frac{2^{n+2}}{3}$. ………………………… 5 分

(2)因为 $c_n=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}=\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)^2+2$，…………………………………………… 6 分

$\therefore T_n=\left(a_1^2+\frac{1}{a_1^2}\right)+\left(a_2^2+\frac{1}{a_2^2}\right)+\cdots+\left(a_n^2+\frac{1}{a_n^2}\right)$

$=\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2-\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)^2+2n$

$=\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot 4+\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot 4^2+\cdots+\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot 4^{n-1}+2n$

$=\dfrac{\frac{64}{9}(4^n-1)}{4-1}+2n=\dfrac{64}{27}(4^n-1)+2n.$ ………………………………………………………………………… 9 分

若 T_n 为整数，因为 $2n\in\mathbf{Z}$，$\therefore \dfrac{64}{27}(4^n-1)\in\mathbf{Z}$，即 $\dfrac{1}{27}(4^n-1)\in\mathbf{Z}$.

$4^n-1=(3+1)^n-1=C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}+\cdots+C_n^{n-3}3^3+C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3+C_n^n-1$

$=C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}+\cdots+C_n^{n-3}3^3+C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3.$

$\therefore C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3$ 能被 27 整除，

$C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3=9\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}+3n=\dfrac{9n^2-3n}{2}=\dfrac{3n(3n-1)}{2}.$

所以 $n=9$ 时，$C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3$ 能被 27 整除，$\therefore n$ 的最小值是 9. ………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)当直线 l 与 x 轴垂直时，由对称性知$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形，

于是 $|OF|=|AF|=|BF|$，即 $c=b\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}-1}=\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{c^2-a^2}{a}$，

解得离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.$ ………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)若 C 的焦距为 2，则 $c=1$，即 $F(1,0)$.

由于直线 l 的斜率不为零，可设其方程为 $x=my+1$.

结合 $b^2=1-a^2(0<a<1)$，联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1-a^2}=1,\end{cases}$

得 $[a^2(m^2+1)-m^2]y^2+2m(a^2-1)y-(a^2-1)^2=0.$ ………………………………………………………… 5 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由韦达定理，

$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-2m(a^2-1)}{a^2(m^2+1)-m^2},\\ y_1y_2=\dfrac{-(a^2-1)^2}{a^2(m^2+1)-m^2},\end{cases}$ ……………………………………………………………………………………… 6 分

由于 A,B 两点均在 C 的右支上，故 $y_1y_2<0\Rightarrow a^2(m^2+1)-m^2>0$，即 $m^2<\dfrac{a^2}{1-a^2}$. ……………………………… 7 分

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(my_1+1)(my_2+1)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1$

$=(m^2+1)\cdot\dfrac{-(a^2-1)^2}{a^2(m^2+1)-m^2}+m\cdot\dfrac{-2m(a^2-1)}{a^2(m^2+1)-m^2}+1$

$=\dfrac{m^2a^2(1-a^2)-a^4+3a^2-1}{a^2(m^2+1)-m^2}.$ ………………………………………………………………………………… 10 分

由$\angle AOB$ 恒为锐角，得 $\forall m^2<\dfrac{a^2}{1-a^2}$，均有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，即 $m^2a^2(1-a^2)-a^4+3a^2-1>0$ 恒成立.

由于 $a^2(1-a^2)>0$，因此不等号左边是关于 m^2 的增函数，

所以只需 $m^2=0$ 时，$-a^4+3a^2-1>0$ 成立即可.

解得 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，结合 $0<a<1$，可知 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

综上所述，C 的实轴长的取值范围是 $(\sqrt{5}-1,2)$. ……………………………………………………………………… 12 分