2019 年协作体数学奥林匹克夏令营试题及参考答案

2019 年协作体数学奥林匹克夏令营 A 水平考试

7 月 20 日　8:30~11:30

河南　郑州外国语学校

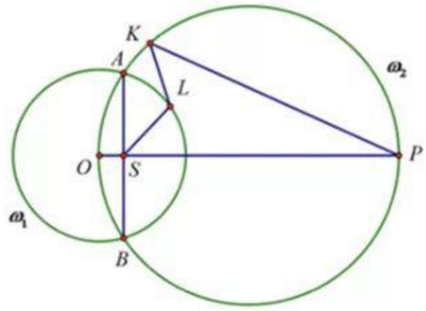
解答题（每题 40 分，共 160 分）

1．设 n 是给定的不小于 3 的整数，求最大的正实数 $C=C(n)$，使得不等式

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^{n-1}+n-1\right)\geq C\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}$$

对任意正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均成立．

2. 如图，圆 ω_1,ω_2 相交于点 A,B，圆 ω_1 的圆心 O 在圆 ω_2 上，过点 O 作直线 AB 的垂线，与线段 AB 相交于点 S，延长 OS 与圆 ω_2 相交于点 P．$\angle ASP$ 的平分线交圆 ω_1 于点 L（点 A,L 在直线 OP 的同侧），点 K 在圆 ω_2 上，使得 $PS=PK$（点 A,K 在直线 OP 的同侧）．求证：$SL=KL$．



3. 已知 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是严格递增的正整数数列．证明：存在无穷多个素数 p，使得存在互不相同的正整数 i,j,k 满足 $p\mid a_i+a_j+a_k$．

4. 设 n 是给定的不小于 4 的偶数．在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\{1,2,\cdots,n\}\}$．将 A 中的 n^2 个点任意地配成 $\frac{n^2}{2}$ 对，每对两个点之间连一条直线（已有的直线不再重复作），用 Γ 表示这些直线的全体，并用 $\alpha(\Gamma)$ 表示 Γ 中任意两条直线的夹角的最大值．求 $\alpha(\Gamma)$ 的最小正值．

2019年协作体数学奥林匹克夏令营A水平考试答案

1. 设n是给定的不小于3的整数，求最大的正实数$C=C(n)$，使得不等式

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^{n-1}+n-1\right)\ge C\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}$$

对任意正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$均成立.

解： 当$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$时，可得$C\le n$. ………… 10分

下证$C=n$时，不等式成立. 即证

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^{n-1}+n-1\right)\ge n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}. \qquad (*)$$

由于$n\ge 3$，那么$a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少有两个数在1的同一侧，不妨设为a_1,a_2.

由Holder不等式，

$$\left(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-2}\right)\left(1+1+a_3^{n-1}+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-3}\right)\cdots\left(\underbrace{1+\cdots+1}_{n-1}+a_n^{n-1}\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}.$$

………… 20分

故欲证（*）只需证

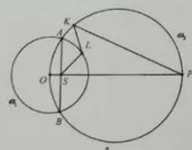
$$\left(a_1^{n-1}+n-1\right)\left(a_2^{n-1}+n-1\right)\ge n\left(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+n-2\right),$$

这等价于
$$\left(a_1^{n-1}-1\right)\left(a_2^{n-1}-1\right)\ge 0. \quad ………… 30分$$

由a_1,a_2在1的同一侧知上式成立，从而（*）获证.

综上可知，所求的最大正实数$C=n$. ………… 40分

2. 如图，圆ω_1,ω_2相交于点A,B，圆ω_1的圆心O在圆ω_2上，过点O作直线AB的垂线，与线段AB相交于点S，延长OS与圆ω_2相交于点P. $\angle ASP$的平分线交圆ω_1于点L（点A,L在直线OP的同侧），点K在圆ω_2上，使得$PS=PK$（点A,K在直线OP的同侧）. 求证：$SL=KL$.



证： 设直线AB与PK相交于点Q，三角形QSP的内心为L'.

因为$\angle QSP=\angle OKP=90^\circ$，所以$Q,K,S,O$四点共圆. 又$PS=PK$，所以$PQ=PO$.

$$\angle QL'S=90^\circ+\frac{1}{2}\angle QPS=90^\circ+\frac{1}{2}\angle QPO$$
$$=180^\circ-\angle QOP=180^\circ-\angle QOS,$$

所以，Q,L',S,O四点共圆，于是Q,K,L',S,O在直径为OQ的圆上. ………… 20分

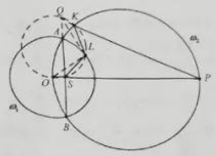
于是

$$\angle QL'K=\angle QSK=90^\circ-\angle KSP=\frac{1}{2}\angle KPS=\angle KPL', \quad ………… 30分$$

所以
$$QK\cdot QP=(QL')^2,$$
从而
$$QA\cdot QB=(QL')^2,$$
于是
$$(QL')^2=QA\cdot QB=QO^2-OA^2=(QL')^2+(OL')^2-OA^2.$$

故$OL'=OA$，即L'在圆ω_1上，所以$L=L'$.

因为L在$\angle ASP$的平分线上，所以$SL=KL$. ………… 40分



3. 已知$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是严格递增的正整数数列. 证明：存在无穷多个素数p，使得存在互不相同的正整数i,j,k满足$p\mid a_i+a_j+a_k$.

证： 用反证法. 假设结论不成立，存在$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$，使$S=\{a_i+a_j+a_k \mid 1\le i<j<k\}$中所有数的素因子构成的集合是有限集，设全部素因子为$p_1,\cdots,p_s$.

由于$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是严格递增的正整数数列，故可取正整数$N>s+1$使$a_N>a_{s+1}^s$.

………… 10分

对$1\le i\le s+1$，考虑$a_i+a_N+a_{N+1}$的标准分解中的最大素数幂，设为$p_{l_i}^{\alpha_i}$，那么由取法知$p_{l_i}^{\alpha_i}>\left(a_i+a_N+a_{N+1}\right)^{\frac{1}{s}}>a_{s+1}$. ………… 20分

但p_{l_i}（$1\le i\le s+1$）只能在$p_1,\cdots,p_s$中取值，故一定有两数相同，设为p_{l_i},p_{l_j}. 记$p=p_{l_i}=p_{l_j}$，则

$$p^{\alpha_i}\mid a_i+a_N+a_{N+1},\ p^{\alpha_j}\mid a_j+a_N+a_{N+1}.$$

故$p^{\min\{\alpha_i,\alpha_j\}}\mid a_i-a_j$，从而$p^{\min\{\alpha_i,\alpha_j\}}\le|a_i-a_j|$. ………… 30分

但$p^{\min\{\alpha_i,\alpha_j\}}>a_{s+1}$，$|a_i-a_j|<a_{s+1}$，矛盾！ ………… 40分

4. 设 n 是给定的不小于 4 的偶数．在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\{1,2,\cdots,n\}\}$．将 A 中的 n^2 个点任意地配成 $\frac{n^2}{2}$ 对，每对两个点之间连一条直线（已有的直线不再重复作），用 Γ 表示这些直线的全体，并用 $\alpha(\Gamma)$ 表示 Γ 中任意两条直线的夹角的最大值．求 $\alpha(\Gamma)$ 的最小正值．

解：首先构造例子使得 $\alpha(\Gamma)=\arctan\frac{1}{n-2}$．

先将所有 $(p,2q-1)$ 与 $(p,2q)$ 配对，其中 $p=1,2,\cdots,n$，$q=1,3,\cdots,n-1$．再将其中的两对 $\{(1,1),(1,2)\},\{(2,n-1),(2,n)\}$ 拆分重组为 $\{(1,1),(2,n-1)\},\{(1,2),(2,n)\}$，此时 Γ 中的所有直线的倾斜角恰有 $\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{n-2}$ 两种值，易知 $\alpha(\Gamma)=\arctan\frac{1}{n-2}$． ………… 10 分

以下假设存在一种配对方式，其相应的直线集 Γ 满足 $0<\alpha(\Gamma)<\arctan\frac{1}{n-2}$．

引理：Γ 中不同时存在斜率异号的两条直线．

引理的证明：假设有 $l_1\in\Gamma$ 的斜率为正，$l_2\in\Gamma$ 的斜率为负，由点集 A 的性质知，l_1 和 l_2 的倾斜角分别属于

$$\left[\arctan\frac{1}{n-1},\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{n-1}\right]\text{和}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{1}{n-1},\pi-\arctan\frac{1}{n-1}\right],$$

因此 $\alpha(\Gamma)\geq 2\arctan\frac{1}{n-1}$．又 $n\geq 4$，所以 $\alpha(\Gamma)\geq 2\arctan\frac{1}{n-1}>\arctan\frac{1}{n-2}$，矛盾．

引理证毕． …………20 分

回到原问题．由对称性，不妨设点 $(1,1)$ 与某点 $(a,b)(a\leq b)$ 配对．

用 $l_{(s,t),(u,v)}$ 表示连接点 $(s,t),(u,v)$ 的直线．考虑以下两种情况．

情况 1：Γ 中不存在竖直直线．

记 l' 为 $(1,n)$ 与其配对点所连直线．易知 $l_{(1,1),(a,b)}$ 斜率不小于 1，而 l' 斜率非正，结合引理知 l' 只能为水平直线．从而 l' 与 $l_{(1,1),(a,b)}$ 的夹角至少为 $\frac{\pi}{4}>\arctan\frac{1}{n-2}>\alpha(\Gamma)$，与 $\alpha(\Gamma)$ 的定义矛盾． ………… 30 分

情况 2：Γ 中存在竖直直线．

由假设，Γ 中直线的倾斜角均属于 $\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{n-2},\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{1}{n-2}\right)$．这样 Γ 中的非竖直直线只可能来自 $I=\left\{l_{(i,1),(i+1,n)}\middle|i\in\{1,2,\cdots,n-1\}\right\}$ 或 $J=\left\{l_{(j,n),(j+1,1)}\middle|j\in\{1,2,\cdots,n-1\}\right\}$，且由引理知 I,J 中必有一个为空集．

不妨设 J 为空集，则 I 非空（否则 Γ 只含竖直直线，此时 $\alpha(\Gamma)=0$，与假设矛盾），故存在最小的 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $l_{(i,1),(i+1,n)}\in I$．因 n 为偶数，在 $(i,k)(2\leq k\leq n)$ 这 $n-1$ 个点中，存在一点 $(i,k_0)(2\leq k_0\leq n)$ 与 A 中另一点 $(c,d)(c\neq i)$ 配对，此时必有 $l_{(i,k_0),(c,d)}\in I$，从而 $l_{(i,k_0),(c,d)}=l_{(i,n),(i-1,1)}$，这与 i 的最小性矛盾．

综上，假设不成立．因此 $\alpha(\Gamma)$ 的最小正值为 $\arctan\frac{1}{n-2}$． ………… 40 分

2019 协作体数学奥林匹克夏令营 O

1. 已知 a,b 是不同的实数，使得关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+3b=0$ 与 $x^2+bx+3a=0$ 有一个公共根，则 $a+b=$ ________.

2. 函数 $f(x)=(x+a)(|x-a|+|x-2019|)$ 的图像为中心对称图形，则实数 a 的值为________.

3. 已知 $\vec{m},\vec{n}$ 是两个非零向量，且 $|\vec{m}|=2,|\vec{m}+2\vec{n}|=4$，则 $|\vec{m}+\vec{n}|+|\vec{n}|$ 的最大值为 ________.

4. 方程 $4\sin x+2\sin 2x=3\sqrt{3}$ 的解集是________.

5. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=1$，$a_n=5a_{n-1}+3^{n-1},n=2,3,\cdots$，则 a_{2019} 除以 3 所得的余数是________.

6. 设非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，则 $\sqrt{2a}+\sqrt[3]{3b}+\sqrt[6]{6c}$ 的最小值为________，最大值为是________.

7. 全国高中数学联赛一试由 8 道填空题和 3 道解答题组成，其中填空题每题 8 分；解答题分步给分，第 1 道解答题 16 分，分 4 步，每步 4 分；第 2 和第 3 道解答题均为 20 分，分四步每步 5 分．批阅解答题时规定，若第 n 步不得分则第 m 步 $(m>n)$ 也不得分．现知某生恰好考了 100 分，则该生答对题的情况共有________ 种（用数字作答）.

8. 若二次三项式 $g(x)=x^2-3x+a$ 的两个实数根是三次多项式 $f(x)=x^3-x^2+cx+4$ 的根，并且二次三项式 $h(x)=x^2+x+b$ 的两个实数根也是三次多项式 $f(x)$ 的根，则 $abc=$ ________.

9. 在三角形 ABC 中，$AB=33,AC=21,BC=m$，点 D,E 分别在边 AB,AC 上，使得 $AD=DE=EC=n$．若 m,n 均为正整数，则 $m=$ ________.

10. 方程组 $\begin{cases}[x,y]+(x,y)=2019\\ x+y=2019\end{cases}$ 的正整数解 x,y 是________.（这里，$[x,y],(x,y)$ 分别是正整数 x,y 的最小公倍数，最大公约数）

11. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F_1，O 为坐标原点，点 P 在椭圆上．点 Q 在椭圆的右准线上，若 $\vec{PQ}=2\vec{F_1O},\vec{F_1Q}=\lambda\left(\dfrac{\vec{F_1P}}{|F_1P|}+\dfrac{\vec{F_1O}}{|F_1O|}\right)(\lambda>0)$ 则此椭圆的离心率为________.

12. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，面 $PDA\perp$ 面 PAB，$\angle PAB=\angle PDA=90^\circ$，$AB=PA=2,PD=AD,CD=\dfrac{\sqrt{6}}{3},BC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．则面 PCD 与面 PAB 所成锐二面角的余弦值为 ________.

13. 从 $1,2,3,\cdots,9$ 中任选 4 个数，则这 4 个数的中位数是整数的概率为________.

14. 已知函数 $y=a\sin x\sin 2x-4\cos x$ 的最小值为 -4，则实数 a 的取值范围是________.

15. 一个直径 $AB=2$ 的半圆，过点 A 作这个圆所在平面的垂线，在垂线上取一点 S，使得 $AS=AB$，C 为半圆上一个动点，N,M 分别为点 A 在直

线 SC,SB 上的射影. 当三棱锥 $S-AMN$ 的体积最大时，$\angle BAC =$ ________.

16. 设正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 满足 $x_8=1,x_9=2,x_{10}=2$，则 $\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{x_i}{x_j}$ 的最小值是________.

17. 对于正整数 a，记 $b=\overline{aa}$ 是 a 的十进制表示从左到右写两遍（如 $a=112$，则 $b=112112$）. 若 $a^2|b$ 则不大于 2019 的正整数 a 的所有可能是________.

18. 将 $1,2,3,\cdots,9$ 这 9 个数全部填入一个 3×3 的方格表内，每个小方格内填一个数，则使得每行中的数从左至右递增，每列中的数从上至下递减的不同填法共有________ 种.

19. 设 $a,b,c,d,e\geqslant0,a^3+b^3=c^3+d^3+e^3+28$，则 $25a+16b-9c-4d-e$ 的最小值是________.

20. 已知 A,B 是椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上的两点，线段 AB 的长为 $\dfrac{8}{3}$，则 $\triangle AOB$ 的面积的取值范围是________.