秘密★启用前

贵港市2021届高中毕业班12月联考监测试题
理科数学

（考试时间：120分钟　满分：150分）

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚。
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，只交答题卡，试卷自行带走。

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，则 $A\cap\mathbf{N}=$

A. $[0,3)$　　B. $[1,3)$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 已知复数 $z=(1+i)(2-i)$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 为

A. $-3-i$　　B. $-3+i$　　C. $3-i$　　D. $3+i$

3. 为了解学生数学能力水平，某市 A，B，C，D 四所初中分别有200，180，100，120名初三学生参加此次数学调研考试，现制定以下卷面分析方案：

C 校参加调研考试的学生中有30名数学培优生，从这些培优生的试卷中抽取10份试卷进行分析.

完成这个方案宜采用的抽样方法依次是

A. 分层抽样法、系统抽样法

B. 分层抽样法、简单随机抽样法

C. 系统抽样法、分层抽样法

D. 简单随机抽样法、分层抽样法

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 已知 $a=0.3^{0.2}$，$b=\log_2 0.3$，$c=\log_{0.3}0.2$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=p\cdot a_n+r$，其中 p，r 为常数，则“$p=1$”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的

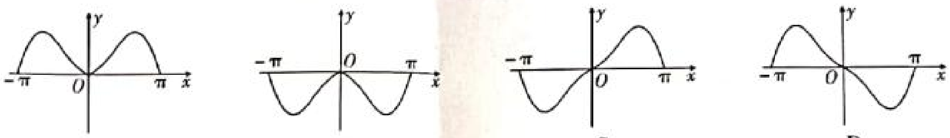
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 函数 $y=x\sin x(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

8. 已知点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，且点 P 到直线 $x=4$ 的距离是点 P 到 x 轴的距离的两倍，则 x_0 的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

9. 设两个相关变量 x 和 y 分别满足 $x_i=i$，$y_i=2^{i-1}$，$i=1,2,\cdots,6$，若相关变量 x 和 y 可拟合为非线性回归方程 $\hat{y}=2^{bx+a}$，则当 $x=7$ 时，y 的估计值为

A. 32　　B. 63

C. 64　　D. 128

10. 某锥体的三视图如图 1 所示，则该锥体的最长的棱为

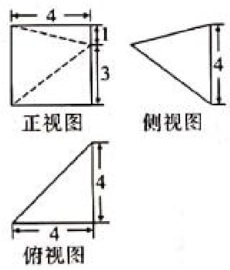


图 1

A. $3\sqrt{5}$

B. $\sqrt{41}$

C. $\sqrt{33}$

D. 5

11. 已知 M 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左支上一点，A，F 分别为双曲线 C 的右顶点和左焦点，$|MA|=|FA|$，若 $\angle MFA=60°$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. 4

C. $2\sqrt{3}$　　D. 6

12. 已知在四棱锥 $A-BCDE$ 中，侧面 $ABC\perp$ 底面 $BCDE$，$BC/\!/DE$，且 $AB=AC=BC=CD=BE=\frac{1}{2}DE=2$，则此四棱锥外接球的表面积等于

A. $\frac{32\pi}{3}$　　B. $\frac{40\pi}{3}$

C. $\frac{124\pi}{9}$　　D. $\frac{52\pi}{3}$

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-5\geqslant 0, \\ x-2y+3\geqslant 0, \\ x-5\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x^2+y^2$ 的最大值为________.

14. 已知 $f(x)=xe^x$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为________.

15. 若二项式 $(1+\sin\alpha)^n$ 展开式中第3项的值为5，则 $\cos 2\alpha=$________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n-1$，若 $b_n=a_n+a_{n+1}$，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $T_{10}=$________.

三、解答题（共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，且 $2c\sin C=(2b-a)\sin B+(2a-b)\sin A$.

（1）求角 C 的大小；

（2）设 $AB=BC=3$，$\angle ADC=120°$，当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求 AD 的值.

18.（本小题满分12分）

2020年上半年数据显示，某省某市空气质量在其所在省中排名倒数第三，PM10（可吸入颗粒物）和PM2.5（细颗粒物）分别排在倒数第一和倒数第四，这引起有关部门高度重视，该市采取一系列“组合拳”治理大气污染，计划到2020年底，全年优、良天数达到180天. 下表是2020年9月1日到9月15日该市的空气质量指数（AQI），其中空气质量指数划分为0～50，51～100，101～150，151～200，201～300和大于300六档，对应空气质量依次为优、良、轻度污染、中度污染、重度污染、严重污染.

日期	1日	2日	3日	4日	5日	6日	7日	8日	9日	10日	11日	12日	13日	14日	15日
AQI指数	49	74	115	192	80	123	109	138	105	73	91	90	77	109	124
PM2.5	36	29	76	112	89	85	40	32	59	35	45	59	53	79	89
PM10	76	86	148	199	158	147	70	83	121	75	96	90	63	113	140

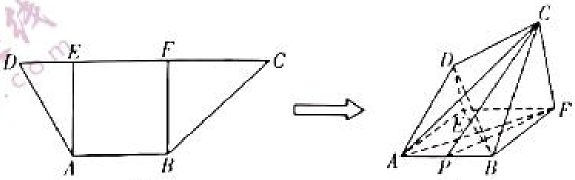
（1）指出这15天中PM2.5的最小值及PM10的极差；

（2）从2020年9月1日到6日这6天的空气质量指数AQI数据中，随机抽取三天的数据，空气质量为优良的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（3）已知2020年前8个月（每个月按30天计算）该市空气质量为优、良的天数约占55%，用9月份这15天空气质量优、良的频率作为2020年后4个月空气质量优、良的概率（不考虑其他因素），估计该市到2020年底，能否完成全年优、良天数达到180天的目标.

19.（本小题满分12分）

如图2甲，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\,/\!/\,CD$，$AE\,/\!/\,BF$，$\angle AEF=90°$，$CF=EF=AE=2DE=2$. 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BFC$ 沿 AE，BF 同侧折起，连接 CD 得到图乙的空间几何体 $ADE-BCF$. 点 P 为线段 AB 上的一点.



甲　　乙

图2

（1）若 $\angle BAD=90°$，证明：$DE\perp BE$；

（2）若 $DE\,/\!/\,CF$，$CD=\sqrt{3}$，平面 CPF 与平面 ACD 所成锐二面角的正切值为8，求 $\dfrac{AP}{PB}$ 的值.

20.（本小题满分 12 分）

已知 F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 P 在抛物线上，线段 PF 的长度比点 P 到直线 $x=-p$ 的距离少 1.

（1）求抛物线的标准方程；

（2）过点 F 作不与 x 轴重合的直线 l，设 l 与圆 $x^2+y^2=p^2$ 相交于 A，B 两点，与抛物线相交于 C、D 两点，已知 $F_1\left(-\frac{p}{2},0\right)$，当 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=\lambda$ 且 $\lambda\in\left[\frac{1}{8},\frac{4}{7}\right]$ 时，求 $\triangle F_1CD$ 的面积 S 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

设函数 $f_n(x)=x^n+bx+c(n\in\mathbf{N}_+,b,c\in\mathbf{R})$.

（1）设 $n\geqslant 2$，$b=1$，$c=-1$，证明：$f_n(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 内存在唯一的零点；

（2）设 $n=2$，若对任意 x_1，$x_2\in[0,1]$，都有 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)|\leqslant 4$，求 b 的取值范围；

（3）在（1）条件下，设 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上的零点，判断数列 $x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 的增减性.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系中，已知圆 C：$x^2+(y-4)^2=4$，以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\rho\in\mathbf{R}\right)$，直线 l 与圆 C 相切于点 P.

（1）求曲线 C 的极坐标方程及点 P 的极坐标；

（2）圆 C_1 的直角坐标方程为 $(x-2\sqrt{3})^2+y^2=6$，直线 l_1 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$，直线 l_1 与圆 C_1 交于 A，B 两点，求 $\triangle PAB$ 的面积.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

设函数 $f(x)=|x-a|+3x$，其中 $a>0$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 3x+4$ 的解集.

（2）若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -2\}$，求 a 的值.

贵港市2021届高中毕业班12月联考监测试题
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	D	C	A	A	B	C	B	B	D

【解析】

1．$A\cap N=\{0,\ 1,\ 2\}$，故选C.

2．$z=(1+i)(2-i)=2-i+2i-i^2=3+i$，即$\bar{z}=3-i$，故选C.

3．由简单随机抽样、分层抽样、系统抽样的概念，结合实际问题，显然应用简单随机抽样、分层抽样，故选D.

4．由已知得$\cos\theta=\dfrac{(-\sqrt{3},\ 1)\cdot(1,\ 0)}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因为$\theta\in[0,\ \pi]$，所以$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$，故选D.

5．$\because 0<0.3<1$，$0.2>0$，$\therefore 0<a=0.3^{0.2}<1$，$b=\log_2 0.3<\log_2 1=0$，$c=\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，$\therefore b<a<c$，故选C.

6．当$p=1$时，$a_{n+1}-a_n=r$为常数，即数列$\{a_n\}$为等差数列；当数列$\{a_n\}$为常数数列时，即公差为0时，$p=0$，所以必要性不成立，故选A.

7．$\because f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，$\therefore y=x\sin x$为偶函数，又当$0<x<\pi$时，$y=x\sin x>0$，故选A.

8．因为点P到直线$x=4$的距离是点P到x轴的距离的两倍，所以$4-x_0=2|y_0|$，两边平方得$16-8x_0+x_0^2=4y_0^2=4\times3\times\left(1-\dfrac{x_0^2}{4}\right)$，解得$x_0=1$，故选B.

9．由$y_i=2^{t-1}=2^{x_i-1}$，得$b=1$，$a=-1$，所以当$x=7$时，y的估计值为$2^{7-1}=64$，故选C.

10．该几何体是以正视图为底面的四棱锥，最长棱为$\sqrt{4^2+4^2+3^2}=\sqrt{41}$，故选B.

11．设双曲线的右焦点为F_1，由题意知，$\triangle MAF$为等边三角形，所以$|MF|=|AF|=a+c$，所以由双曲线的定义，得$|MF_1|=|MF|+2a=3a+c$．在$\triangle MFF_1$中，由余弦定理得$\cos\angle MFF_1=\dfrac{(a+c)^2+(2c)^2-(3a+c)^2}{2(a+c)(2c)}=\dfrac{1}{2}$，化简得$c^2-3ac-4a^2=0$，得$e^2-3e-4=0$，解得$e=4$或$e=-1$（舍），即双曲线$C$的离心率为4，故选B.

12．四棱锥 $A-BCDE$ 中，侧面 $ABC\perp$ 底面 $BCDE$，如图 1 所示，

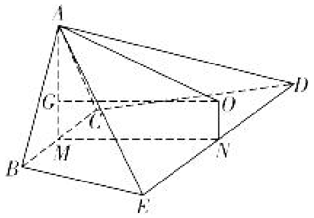


图 1

$\triangle ABC$ 为正三角形，所以 $AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．在等腰梯形 $BCDE$ 中，由 $BC=CD=BE=\frac{1}{2}DE=2$，易知 $\angle CDE=\frac{\pi}{6}$，$EC=2\sqrt{3}$，又 $CD=\frac{1}{2}DE=2$，所以 $\triangle ECD=\frac{\pi}{2}$，所以等腰梯形 $BCDE$ 的外接圆圆心为 DE 的中点 N．设四棱锥外接球的球心为 O，$OG=MN=CD\sin\angle CDE=\sqrt{3}$，所以四棱锥外接球的半径为 $R=\sqrt{AG^2+OG^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{\frac{13}{3}}$，所以四棱锥外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{52\pi}{3}$，故选 D．

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	41	2e	$\frac{1}{3}$	3069

【解析】

13．不等式组表示的可行域是以 $A(5,\ 4)$，$B(1,\ 2)$，$C(5,\ 0)$ 为顶点的三角形区域，如图 2 所示，目标函数 $z=x^2+y^2$ 的最大值即为点 A 到 O 点的距离的平方，$\therefore z_{\max}=(\sqrt{(5-0)^2+(4-0)^2})^2=41$．

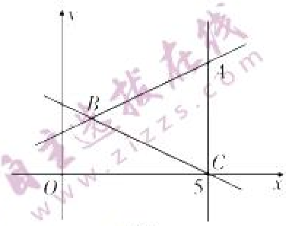


图 2

14．$f'(x)=(1+x)\mathrm{e}^x$，$\therefore k=f'(1)=(1+1)\mathrm{e}^1=2\mathrm{e}$．

15．$T_3=\mathrm{C}_6^2(\sin\alpha)^2=15\sin^2\alpha=5$，$\sin^2\alpha=\frac{1}{3}$，$\therefore\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$．

16．由 $a_n=S_n-S_{n-1}$，得 $a_n=2^{n-1}\ (n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$S_1=2-1=1$ 也适合，$\therefore a_n=2^{n-1}$，$b_n=a_n+a_{n+1}=2^{n-1}+2^n=3\times 2^{n-1}$，$\therefore T_n=3\times\frac{1-2^n}{1-2}=3\times 2^n-3$，$\therefore T_{10}=3\times 2^{10}-3=3069$．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）如图 3，由已知，根据正弦定理得 $2c^2=(2b-a)b+(2a-b)a$，

即 $c^2=a^2+b^2-ab$， ……………………………（2 分）

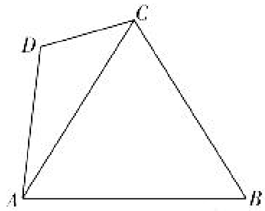


图 3

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，故 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，

……………………………………………（4 分）

$\therefore C=60°$． ……………………………………………（5 分）

（2）由 $AB=BC=3$，$C=60°$，得 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

……………………………………………………………（7 分）

$\therefore AC=3$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$． ……………………………………（8 分）

又 $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$

$=AD^2+DC^2+AD\cdot DC\geqslant 3AD\cdot DC$，

$\therefore AD\cdot DC\leqslant 3$，当且仅当 $AD=DC$ 时取等号， ……………………………………（9 分）

$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot AD\cdot DC\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$， ……………………………（10 分）

四边形 $ABCD$ 的面积 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}\leqslant\dfrac{9\sqrt{3}}{4}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$， ……………………（11 分）

由 $AD=DC$，得 $AD=\dfrac{AC}{2\sin 60°}=\sqrt{3}$． ……………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）这 15 天中 PM2.5 的最小值为 29，PM10 的最大值为 199，最小值为 63，

………………………………………………………（2 分）

所以极差为 136． ………………………………………………………（4 分）

（2）这 6 天中空气质量为优良的天数为 3 天，

所以随机变量 X 可能的取值为 0，1，2，3， ……………………………………（5 分）

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$， $P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$， $P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$． ……………………………………（7 分）

随机变量 X 的分布列为下表：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{1}{20}$

……………………………………………………………（8 分）

所以 $EX=0\times\dfrac{1}{20}+1\times\dfrac{9}{20}+2\times\dfrac{9}{20}+3\times\dfrac{1}{20}=1.5$． ……………………………………（9 分）

（3）由前 8 个月空气质量优、良的天数约占 55%，可得空气质量优、良的天数为

$55\%\times240=132$， ……………………………………………………（10 分）

9 月份这 15 天空气优、良的天数有 7 天，空气质量优、良的频率为 $\dfrac{7}{15}$，

2020 年后 4 个月该市空气质量优、良的天数约为 $120\times\dfrac{7}{15}=56$，

……………………………………………………………（11 分）

$\therefore 132+56=188>180$，

所以估计该市到 2020 年底，能完成全年优、良天数达到 180 天的目标．………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

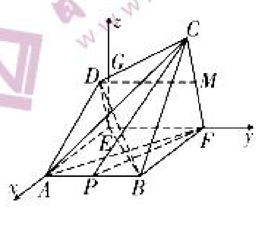


图 4

（1）证明：如图 4，由已知得四边形 $ABFE$ 是正方形，所以在题图乙中，$AB\perp AE$，

又 $\angle BAD=90^\circ$，$AE\cap AD=A$，所以 $AB\perp$ 平面 ADE．

又 $DE\subset$ 平面 ADE，所以 $AB\perp DE$， ……………………………………（3 分）

又 $AE\perp DE$，$AB\cap AE=A$，所以 $DE\perp$ 平面 $ABFE$，

又 $BE\subset$ 平面 $ABFE$，所以 $DE\perp BE$． ……………………………………（6 分）

（2）解：在题图乙中，$AE\perp EF$，$AE\perp DE$，且 $DE\cap EF=E$，

所以 $AE\perp$ 平面 $DEFC$，过 E 作 $EG\perp EF$ 交 DC 于点 G，

可知 GE，EA，EF 两两垂直. ……………………………………………………（7 分）

以 E 为坐标原点，以 $\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系.

所以 $A(2,\ 0,\ 0)$，$B(2,\ 2,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ \sqrt{3})$，$D\left(0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$F(0,\ 2,\ 0)$，

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 1,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=\left(-2,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ……………………………（8 分）

设平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+y+\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{n}=(1,\ -1,\ \sqrt{3})$. ……………………………（9 分）

设 $AP=t$，则 $P(2,\ t,\ 0)$，$t\in(0,\ 2)$，则 $\overrightarrow{FC}=(0,\ -1,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{FP}=(2,\ t-2,\ 0)$.

设平面 CFP 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FP}=0,\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{m}=\left(t-2,\ -2,\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. ……………………………………（10 分）

设平面 CFP 与平面 ACD 所成锐二面角为 θ，则由 $\tan\theta=8$，得 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$，

$$\therefore \cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|t-2|}{\sqrt{5}\times\sqrt{(t-2)^2+4+\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{65}},$$

解得 $t=\dfrac{4}{3}$ 或 $t=\dfrac{8}{3}>2$（舍去）. ……………………………………………（11 分）

所以 $AP=\dfrac{4}{3}$，$BP=2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}$，所以 $\dfrac{AP}{PB}=2$. ……………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为线段 PF 的长度等于点 P 到准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离，

……………………………………………………………（1 分）

$\therefore\left|-\frac{p}{2}-(-p)\right|=1$，即 $p=2$，　　……………………………………………（3 分）

所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$．　　……………………………………………（4 分）

（2）由（1）知 $F(1,\ 0)$，$F_1(-1,\ 0)$，

由题意，设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，$t\in\mathbf{R}$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\x^2+y^2=4,\end{cases}$ 得 $(t^2+1)y^2+2ty-3=0$，

……………………………………………………………（5 分）

则 $y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+1}$，$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+1}$，　　……………………………………（6 分）

$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=(x_1+1,\ y_1)\cdot(x_2+1,\ y_2)=(t^2+1)y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4=\frac{1-3t^2}{t^2+1}$，

……………………………………………………………（7 分）

$\because\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}\in\left[\frac{1}{8},\ \frac{4}{7}\right]$，$\therefore\frac{1}{8}\leqslant\frac{1-3t^2}{t^2+1}\leqslant\frac{4}{7}$，解得 $t^2\in\left[\frac{3}{25},\ \frac{7}{25}\right]$．

……………………………………………………………（9 分）

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4ty-4=0$．

设 $C(x_3,\ y_3)$，$D(x_4,\ y_4)$，$\therefore y_3+y_4=4t$，$y_3y_4=-4$，……………………（10 分）

则 $S_{\triangle F_1CD}=\frac{1}{2}|F_1F|\cdot|y_3-y_4|=\sqrt{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}=\sqrt{(4t)^2+16}=4\sqrt{t^2+1}$．

……………………………………………………………（11 分）

因为 $t^2+1\in\left[\frac{28}{25},\ \frac{32}{25}\right]$，$\therefore S\in\left[\frac{8\sqrt{7}}{5},\ \frac{16\sqrt{2}}{5}\right]$，

即 $\triangle F_1CD$ 的面积 S 的取值范围为 $\left[\frac{8\sqrt{7}}{5},\ \frac{16\sqrt{2}}{5}\right]$．　　……………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）$b=1$，$c=-1$，$n\geqslant 2$，则 $f_n(x)=x^n+x-1$，

$\because f_n\left(\frac{1}{3}\right)f_n(1)=\left(\frac{1}{3^n}-\frac{2}{3}\right)\times 1<0$，$\therefore f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上存在零点，

…………（2 分）

又当 $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ 时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+1>0$，

$\therefore f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上单调递增，…………（3 分）

$\therefore f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上存在唯一零点．…………（4 分）

（2）当 $n=2$ 时，$f_2(x)=x^2+bx+c$，对任意 x_1，$x_2\in[0,1]$，

都有 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)|\leqslant 4$ 等价于 $f_2(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值之差 $M\leqslant 4$，

…………（5 分）

据此分类讨论如下：

①当 $-\frac{b}{2}>1$ 或 $-\frac{b}{2}<0$，即 $b<-2$ 或 $b>0$ 时，$M=|f_2(1)-f_2(0)|=|1+b|\leqslant 4$，

$\therefore -5\leqslant b<-2$ 或 $0<b\leqslant 3$；…………（6 分）

②当 $\frac{1}{2}\leqslant -\frac{b}{2}\leqslant 1$，即 $-2\leqslant b\leqslant -1$ 时，$M=f_2(0)-f_2\left(-\frac{b}{2}\right)=\frac{b^2}{4}\leqslant 4$ 恒成立；

…………（7 分）

③当 $0\leqslant -\frac{b}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，即 $-1\leqslant b\leqslant 0$ 时，$M=f_2(1)-f_2\left(-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{b}{2}+1\right)^2\leqslant 4$ 恒成立，

…………（8 分）

综上可知，$-5\leqslant b\leqslant 3$．…………（9 分）

（3）证法一：设 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上的唯一零点 $(n\geqslant 2)$，

$f_n(x_n)=x_n^n+x_n-1=0$，$f_{n+1}(x_{n+1})=x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}-1=0$，$x_{n+1}\in\left(\frac{1}{3},1\right)$，

…………（10 分）

于是有 $f_n(x_n)=0=f_{n+1}(x_{n+1})=x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}-1<x_{n+1}^{n}+x_{n+1}-1=f_n(x_{n+1})$，

……………………………………………………（11 分）

又由（1）知 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上是单调递增，故 $x_n<x_{n+1}\ (n\geqslant 2)$，

所以数列 x_2，x_3，…，x_n，… 是递增数列． ……………………………………（12 分）

证法二：由 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上的唯一零点，

$f_{n+1}(x_n)f_{n+1}(1)=(x_n^{n+1}+x_n-1)(1^{n+1}+1-1)=x_n^{n+1}+x_n-1<x_n^{n}+x_n-1=0$，

则 $f_{n+1}(x)$ 的零点 x_{n+1} 在 $(x_n,1)$ 内，故 $x_n<x_{n+1}\ (n\geqslant 2)$，

所以数列 x_2，x_3，…，x_n，… 是递增数列．

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 代入 $x^2+(y-4)^2=4$，得极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\sin\theta+12=0$，

……………………………………………………（1 分）

又 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha\ (\rho\in\mathbf{R})$，将 $\theta=\alpha$ 代入 C，得 $\rho^2-8\rho\sin\alpha+12=0$，

则 $\Delta=(8\sin\alpha)^2-48=0$，$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………………………（3 分）

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha=\frac{\pi}{3}$，此时 $\rho=2\sqrt{3}$，

所以点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$． ……………………………………（5 分）

（2）由圆 C_1 的直角坐标方程为 $(x-2\sqrt{3})^2+y^2=6$，知圆心 $C_1(2\sqrt{3},0)$，

设 $A\left(\rho_1,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$，将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入 C_1 的极坐标方程 $\rho^2-4\sqrt{3}\rho\cos\theta+6=0$，

……………………………………………………（7 分）

得 $\rho^2-6\rho+6=0$，$\Delta=12>0$，所以 $\rho_1+\rho_2=6$，$\rho_1\rho_2=6$， ……………………（8 分）

所以 $\rho_1>0$， $\rho_2>0$，

又因为 $S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}\rho_1\rho_P\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rho_1$， ……………………………………（9 分）

$S_{\triangle POB}=\frac{1}{2}\rho_2\rho_P\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rho_2$，

所以 $S_{\triangle PAB}=|S_{\triangle POA}-S_{\triangle POB}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\rho_1-\rho_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=3$．

……………………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：(1) 当 $a=2$ 时， $f(x)\geqslant 3x+4$ 可化为 $|x-2|\geqslant 4$．…………………………………（2 分）

由此可得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 6$． …………………………………………………………（4 分）

故不等式 $f(x)\geqslant 3x+4$ 的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 6\}$． ………………………………（5 分）

(2) 由 $f(x)\leqslant 0$，得 $|x-a|+3x\leqslant 0$，

此不等式化为不等式组 $\begin{cases}x\geqslant a,\\ x-a+3x\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<a,\\ a-x+3x\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant a,\\ x\leqslant \frac{a}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<a,\\ x\leqslant -\frac{a}{2},\end{cases}$

……………………………………………………………（7 分）

因为 $a>0$，所以不等式组的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -\frac{a}{2}\right\}$， ………………………………（9 分）

由题设可得 $-\frac{a}{2}=-2$，故 $a=4$． ……………………………………………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》