（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，M 为抛物线 C 上的点，且 $AM \perp BM$，$MF \perp AB$，求 $\triangle ABM$ 的面积.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\left(t - 2\sqrt{2}\right) \\ y = t \end{cases}$（$t$ 为参数）.以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\left(1 + 3\sin^2\theta\right) = 4$.

（1）求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；

（2）若射线 $\theta = \beta$（其中 $\beta \in (0,\pi)$，且 $\tan\beta = -\frac{1}{2}$，$\rho \geq 0$）与曲线 C 在 x 轴上方交于点 M，与直线 l 交于点 N，求 $|MN|$.

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x) = |2x + 2| + |x - 3|$.

（1）求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集；

（2）若 $\forall x \in \mathbf{R}$，$\left|a^2 - 3a\right| \leq f(x)$，求 a 的取值范围.

理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	A	C	C	B	C	C	A	D	A

1.D　解析：由题意得 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$，故 $A \cap B = \{(0,0),(1,1)\}$，

2.A　解析：$\frac{z}{2+\mathrm{i}} = \frac{a+b\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(a+b\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{2a+b+(2b-a)\mathrm{i}}{5}$ 为纯虚数，$\therefore \begin{cases} 2a+b=0 \\ 2b-a \neq 0 \end{cases}$，$\therefore \frac{b}{a} = -2$.

3.B　解析：$S_6 = \frac{6(a_1+a_6)}{2} = \frac{6(a_3+a_4)}{2} = 12$.

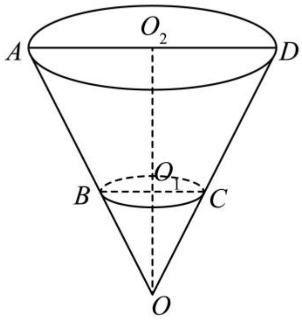
4.A　解析：由题意可得 $2\vec{a} - \vec{b} = (3, 2-x)$，　$\therefore 3x = 2 - x$，解得 $x = \frac{1}{2}$，$\therefore |\vec{b}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

5.C　解析：由题意，$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$，$\bar{y} = \frac{75+84+93+98+100}{5} = 90$，将 $(3,90)$ 代入 $\hat{y} = 6.4x + a$，

可得 $90=6.4\times3+a$，解得 $a=70.8$，线性回归直线方程为 $\hat{y}=6.4x+70.8$，将 $x=58$ 代入上式，

$\hat{y}=6.4\times58+70.8=442$.

6.C　解析：将圆台补成圆锥，则羽毛所在曲面的面积为大、小圆锥的侧面积之差，设小圆锥母线长为 x，则大圆锥母线长为 $x+6$，由相似得 $\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{1}{3}$，即 $x=3$，$\therefore$可估算得球托之外羽毛所在的曲面的展开图的圆心角为 $\dfrac{2\pi\cdot1}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$.



7.B　解析：展开式所有项的二项式系数和为 $2^7=128$，故 A 错误；展开式共有 8 项，

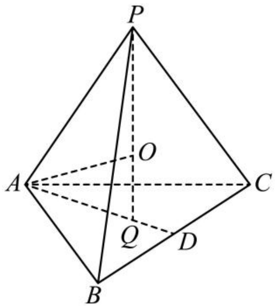
$\therefore$第 4 项和第 5 项二项式系数最大，故 B 正确；令 $x=1$ 得所有项的系数和为 $(2-1)^7=1$，故 C 错误；

$T_{r+1}=C_7^r\cdot(-1)^r\cdot2^{7-r}\cdot x^{2r-7}$，$\therefore T_2$，$T_4$，$T_6$ 均小于 0，$T_1=128x^{-7}$，$T_3=672x^{-3}$，$T_5=280x$，$T_7=14x^5$，$\therefore$第 3 项的系数最大，故 D 错误.

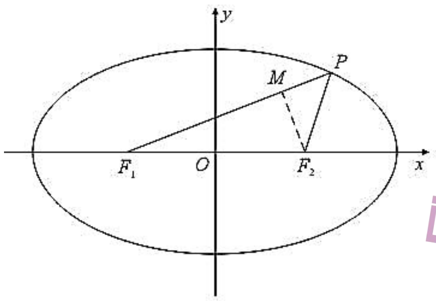
8.C　解析：设方程 $(x^2-mx+27)(x^2-nx+27)=0$ 的四个根由小到大依次为 a_1，a_2，a_3，a_4.不妨设 $x^2-mx+27=0$ 的一根为 1，则另一根为 27，$\therefore m=1+27=28$.由等比数列的性质可知 $a_1a_4=a_2a_3$，$\therefore a_1=1$，$a_4=27$，$\therefore$等比数列 a_1，a_2，a_3，a_4 的公比为 $q=\sqrt[3]{\dfrac{a_4}{a_1}}=3$，$\therefore a_2=1\times3=3$，$a_3=1\times3^2=9$，由韦达定理得 $n=3+9=12$，$\therefore |m-n|=|28-12|=16$.

9.C　解析：如图，设点 Q 为 $\triangle ABC$ 的中心，则 $PQ\perp$ 平面 ABC，

$\therefore \angle PAQ=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore AQ=\sqrt{3}$，$PQ=3$.球心 O 在直线 PQ 上，连接 AO，设球 O 的半径为 r，则 $OA=OP=r$，$OQ=3-r$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAQ$ 中，$r^2=(\sqrt{3})^2+(3-r)^2$，解得 $r=2$，$\therefore$球 O 的表面积为 $4\pi r^2=16\pi$.



10.A　解析：如图，由题意得$\left|F_2M\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$\angle F_1PF_2=60°$，$\therefore\left|PM\right|=\dfrac{1}{3}a$，$\left|PF_2\right|=\dfrac{2}{3}a$，由椭圆定义可得 $\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=\left|PM\right|+\left|MF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，$\therefore$ $\left|MF_1\right|=a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MF_1F_2$ 中，由勾股定理得 $a^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=4c^2$，可得$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



11.D　解析：$\because f\left(2-x\right)=f\left(x\right)$，$\therefore f\left(x\right)$关于$x=1$对称，$\because f\left(x+2\right)-1$为奇函数，$\therefore$由平移可得$f\left(x\right)$关于$\left(2,1\right)$对称，且$f\left(2\right)=1$，$\therefore$函数$f\left(x\right)$是以 4 为周期的周期函数. $f\left(1\right)+f\left(3\right)=2f\left(2\right)=2$，$f\left(4\right)=f\left(2\right)=1$，$\therefore f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=4$，　$\therefore\sum\limits_{k=1}^{2023}f\left(k\right)=4\times\dfrac{2024}{4}-f\left(4\right)=2023$.

12.A　解析：由$\sqrt{1+2a}=\mathrm{e}^b=\dfrac{1}{1-c}=1.01$可得$a=\dfrac{1.01^2-1}{2}$，$b=\ln 1.01$，$c=1-\dfrac{1}{1.01}$，比较 a 和 b，构造函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{2}-\ln x$，当 $x>1$，$f'\left(x\right)=x-\dfrac{1}{x}>0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，故$f\left(1.01\right)>f\left(1\right)=0$，即$a>b$.同理比较 b 和 c，构造函数$g\left(x\right)=\ln x-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$，当$x>1$，$g'\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x^2}>0$，$\therefore g\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，$\therefore g\left(1.01\right)>g\left(1\right)=0$，即$b>c$.综上，$a>b>c$.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.1　　14.$\dfrac{9}{16}$　　15.1 或 3 或 5 或 7（写出其中一个即可）　　16.$\sqrt{3}$

13.1　解析：作出可行域，易得目标函数 $z=x-y$ 在点 $A\left(4,3\right)$ 处取得最大值 1.

14. $\dfrac{9}{16}$　解析：$f\left(\log_2 3\right)=f\left(\log_2 3-1\right)=f\left(\log_2\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\log_2\dfrac{3}{2}-1\right)=f\left(\log_2\dfrac{3}{4}\right)=4^{\log_2\frac{3}{4}}=2^{2\log_2\frac{3}{4}}=\dfrac{9}{16}$.

15.1 或 3 或 5 或 7（写出其中一个即可）

解析：由已知可得 $\cos\left(\omega\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$\therefore \omega\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore \omega=1+2k$，$k\in\mathbf{Z}$

$\because f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{8}\right]$ 上单调，$\therefore \omega x\in\left[0,\dfrac{\pi}{8}\omega\right]$，$\therefore$ 结合 $y=\cos u$ 的图象可得 $\dfrac{\pi}{8}\omega\le\pi$，$\therefore 0<\omega\le 8$，$\therefore$ $\omega=1$ 或 3 或 5 或 7.

16. $\sqrt{3}$　解析：由题意知渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，右焦点为 $F\left(c,0\right)$，$\therefore d=\dfrac{\left|bc\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$. 由 $\begin{cases} y=1 \\ y=\dfrac{b}{a}x \end{cases}$ 得 $x=\dfrac{a}{b}$；由 $\begin{cases} y=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(x>0\right) \end{cases}$ 得 $x=\sqrt{a^2\left(1+\dfrac{1}{b^2}\right)}=\dfrac{a\sqrt{b^2+1}}{b}$，$\therefore$ 截面面积为 $\pi\left(\dfrac{a^2\left(b^2+1\right)}{b^2}-\dfrac{a^2}{b^2}\right)=\pi a^2$，

阴影部分绕 y 轴转一周所得几何体的体积等于底面积与截面面积相等，高为 2 的圆柱的体积，

$\therefore V=2\pi a^2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}dc\pi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}bc\pi$，即 $\sqrt{6}a^2=bc$，$\therefore 6a^4=b^2c^2=\left(c^2-a^2\right)c^2$，即 $6a^4=c^4-a^2c^2$，

$\therefore e^4-e^2-6=0$，解得 $e^2=3$，$\therefore e=3$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17.解析：

（1）$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\right]\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2A\right)+1}{2}=\dfrac{1}{4}$，

（或 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\dfrac{1}{2}\sin A\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\dfrac{1}{2}\sin A\right)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)$

$=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2A\right)+1}{2}=\dfrac{1}{4}$），$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2A\right)=-\dfrac{1}{2}$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}+2A<\dfrac{7\pi}{3}$，$\therefore \dfrac{\pi}{3}+2A=\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}+2A=\dfrac{4\pi}{3}$，解得 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $A=\dfrac{\pi}{2}$，$\because a<c$，

$\therefore A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$.（6 分）

（2）由（1）知 $A=\dfrac{\pi}{6}$，$a\sin A+c\sin C=4\sqrt{3}\sin B$，由正弦定理得 $a^2+c^2=4\sqrt{3}b=12$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，即 $12-c^2=3+c^2-2\sqrt{3}c\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，整理得 $2c^2-3c-9=0$，

由 $c>0$ 得 $c=3$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.（12 分）

18.解析：(1) 由样本频率分布直方图得，样本中获一等奖的有 6 人，获二等奖的有 8 人，获三等奖的有 16 人，共有 30 人获奖，70 人没有获奖.

从该样本中随机抽取的 2 名学生的竞赛成绩，基本事件总数为 C_{100}^2，

设“抽取的 2 名学生中恰有 1 名学生获奖”为事件 A，则事件 A 包含的基本事件的个数为 $C_{70}^1C_{30}^1$，

$\because$ 每个基本事件出现的可能性都相等，$\therefore P(A)=\dfrac{C_{70}^1C_{30}^1}{C_{100}^2}=\dfrac{14}{33}$，即抽取的 2 名学生中恰有 1 名学生获奖的概率为 $\dfrac{14}{33}$.（4 分）

（2）由样本频率分布直方图得，样本平均数的估计值

$\overline{x}=35\times0.006\times10+45\times0.012\times10+55\times0.018\times10+65\times0.034\times10$

$+75\times0.016\times10+85\times0.008\times10+95\times0.006\times10=64$.（10 分）

（3）由题意所有参赛学生的成绩 X 近似服从正态分布 $N\left(64,14^2\right)$.

$\because \mu+\sigma=78$，$\therefore P(X>78)\approx\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$.

故参赛学生中成绩超过 78 分的学生数为 $0.15865\times10000\approx1587$.（12 分）

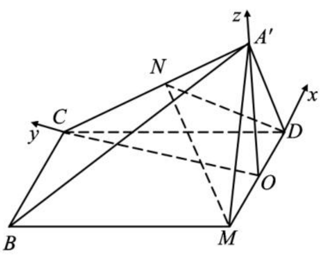
19.解析：(1) 取 DM 中点 O，连接 $A'O$，CO，则由已知可得 $DM\perp A'O$，$DM\perp CO$，

$\because A'O\cap CO=O$，$\therefore DM\perp$ 平面 $A'CO$，$\therefore DM\perp A'C$，

$\because DC=DA'=4$，$\therefore DN\perp A'C$，

$\because DN\cap DM=D$，$\therefore A'C\perp$ 平面 DMN，

$\because A'C\subset$ 平面 $A'BC$，$\therefore$ 平面 $A'BC\perp$ 平面 DMN.（5 分）



（2）由已知可求得 $OC=OA'=2\sqrt{3}$，$\therefore OC^2+OA'^2=A'C^2$，$\therefore OC\perp OA'$，

$\because A'O\perp OD$，$CO\perp OD$，$\therefore$以O为坐标原点，分别以OD，OC，OA'所在直线为x，y，z轴，建立如图所示空间直角坐标系$Oxyz$

则$D(2,0,0)$，$M(-2,0,0)$，$C\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，$A'\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$.

设$\overrightarrow{A'N}=\lambda\overrightarrow{A'C}(0\le\lambda\le1)$，则$\overrightarrow{A'N}=\left(0,2\sqrt{3}\lambda,-2\sqrt{3}\lambda\right)$，

$\therefore N\left(0,2\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda\right)$，$\therefore\overrightarrow{DN}=\left(-2,2\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda\right)$，$\overrightarrow{MD}=(4,0,0)$

设平面DMN的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{n_1}=4x=0\\ \overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{n_1}=-2x+2\sqrt{3}\lambda y+\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda\right)z=0\end{cases}$，

令$y=\lambda-1$，则$\overrightarrow{n_1}=(0,\lambda-1,\lambda)$.

易得平面CDM的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$.

设二面角$C-DM-N$的平面角为θ，由图可得θ为锐角，$\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\left|\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)^2+\lambda^2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$或-1（舍去）

$\therefore\dfrac{A'N}{NC}=\dfrac{1}{2}$.（12分）

（几何法：连接$A'O$，CO，NO，则二面角$C-DM-N$的平面角为$\angle CON$，过点N作$NH\perp CO$，则$NH\parallel A'O$，$NH=CH=2HO$，$\therefore\dfrac{OH}{HC}=\dfrac{A'N}{NC}=\dfrac{1}{2}$）

20.解析：（1）当$m=0$时，$f(x)=\dfrac{\ln x-2}{x}+1$，其定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{3-\ln x}{x^2}$，

$\therefore$当$x\in\left(0,\mathrm{e}^3\right)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(e^3,+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$在$\left(0,\mathrm{e}^3\right)$单调递增，在$\left(e^3,+\infty\right)$单调递减，

$\therefore f(x)$的极大值为$f\left(\mathrm{e}^3\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}+1$，无极小值.（4分）

（2）由$f(x)<0$得$m\mathrm{e}^x+\dfrac{\ln x-2}{x}+1<0$，$\therefore m<\dfrac{2-\ln x-x}{x\mathrm{e}^x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.

令$h(x)=\dfrac{2-\ln x-x}{x\mathrm{e}^x}$，则$h'(x)=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{x}-1\right)x-(2-\ln x-x)(x+1)}{x^2\mathrm{e}^x}=\dfrac{(x+1)(x-3+\ln x)}{x^2\mathrm{e}^x}$，

令$\varphi(x)=x-3+\ln x$，易知$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

$\because\varphi(2)=\ln2-1<0$，$\varphi(3)=\ln3>0$，$\therefore\exists x_0\in(2,3)$，使得$\varphi(x_0)=0$，即$\ln x_0=3-x_0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$h'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$h'\left(x\right)>0$；

$\therefore h\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore h\left(x\right)_{\min}=h\left(x_0\right)=\dfrac{2-\ln x_0-x_0}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}$.

由 $\ln x_0=3-x_0$ 得 $\ln x_0+\ln\mathrm{e}^{x_0}=\ln\left(x_0\mathrm{e}^{x_0}\right)=3$，$\therefore x_0\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^3$，

$\therefore h\left(x\right)_{\min}=h\left(x_0\right)=\dfrac{2-\ln x_0-x_0}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$，　$\therefore m<-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$，

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$.（12 分）

（由 $f\left(x\right)<0$ 得 $m\mathrm{e}^x+\dfrac{\ln x-2}{x}+1<0$，$\therefore m<\dfrac{2-\ln x-x}{x\mathrm{e}^x}=\dfrac{2-\ln x-x}{\mathrm{e}^{\ln x+x}}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

令 $t=\ln x+x$，易得 $t\in\mathbf{R}$，$\therefore m<\dfrac{2-t}{\mathrm{e}^t}$ 恒成立，$\therefore m<\left(\dfrac{2-t}{\mathrm{e}^t}\right)_{\min}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$）

21.解析：（1）由已知可得 $\dfrac{p}{2}=1$，解得 $p=2$，$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.（3 分）

（2）设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$M\left(x_3,y_3\right)$，

若 $AB\perp x$ 轴，由 $MF\perp AB$ 得 $M\left(0,0\right)$，$A\left(1,2\right)$，$B\left(1,-2\right)$ 或 $A\left(1,-2\right)$，$B\left(1,2\right)$，

此时不满足 $AM\perp BM$，$\therefore$ 不满足题意；

设直线 AB 的方程为 $x=my+1\left(m\neq 0\right)$，直线 MF 的方程为 $x=-\dfrac{1}{m}y+1\left(m\neq 0\right)$，

将 $x=my+1$ 代入抛物线方程得 $y^2-4my-4=0$，$\Delta=16\left(m^2+1\right)>0$，

$\therefore y_1+y_2=4m$，　$y_1y_2=-4$.

将 $x=-\dfrac{1}{m}y+1$ 代入抛物线方程得 $y^2+\dfrac{4}{m}y-4=0$，$\therefore y_3^2+\dfrac{4}{m}y_3-4=0$ ①.

直线 AM 的斜率为 $\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{\dfrac{y_3^2}{4}-\dfrac{y_1^2}{4}}=\dfrac{4}{y_3+y_1}$，同理直线 BM 的斜率为 $\dfrac{4}{y_3+y_2}$.

$\because AM\perp BM$，$\therefore \dfrac{4}{y_3+y_1}\cdot\dfrac{4}{y_3+y_2}=-1$，$\therefore y_3^2+\left(y_1+y_2\right)y_3+y_1y_2=-16$，即 $y_3^2+4my_3+12=0$ ②.

由①②解得 $y_3=\dfrac{4m}{1-m^2}$，将其代入①可得 $4m^2+4\left(1-m^2\right)-\left(1-m^2\right)^2=0$，

解得 $\begin{cases}m=\sqrt{3}\\ y_3=-2\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\sqrt{3}\\ y_3=2\sqrt{3}\end{cases}$，

当$\begin{cases} m=\sqrt{3} \\ y_3=-2\sqrt{3} \end{cases}$时，直线 AB 的方程为 $x=\sqrt{3}y+1$，$M\left(3,-2\sqrt{3}\right)$，$|MF|=4$.

$\because y_1$， y_2满足 $y^2-4\sqrt{3}y-4=0$，$\therefore y_1+y_2=4\sqrt{3}$， $y_1y_2=-4$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{48+16}=16$，

$\therefore S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times|MF|=\dfrac{1}{2}\times16\times4=32$.

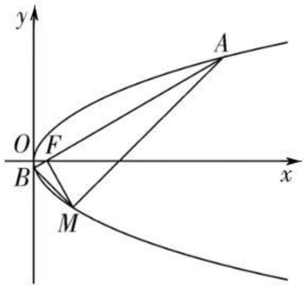
同理可得，当$\begin{cases} m=-\sqrt{3} \\ y_3=2\sqrt{3} \end{cases}$时，直线 AB 的方程为 $x=-\sqrt{3}y+1$，$M\left(3,2\sqrt{3}\right)$，$|MF|=4$，

$\because y_1$，y_2满足 $y^2+4\sqrt{3}y-4=0$，$\therefore y_1+y_2=-4\sqrt{3}$， $y_1y_2=-4$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{48+16}=16$，

$\therefore S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times|MF|=\dfrac{1}{2}\times16\times4=32$，

$\therefore \triangle ABM$ 的面积为 32.（12 分）



22.解析：（1）由$\begin{cases} x=2\left(t-2\sqrt{2}\right) \\ y=t \end{cases}$，得 $x=2\left(y-2\sqrt{2}\right)$，即 $x-2y+4\sqrt{2}=0$.

故直线l的普通方程是 $x-2y+4\sqrt{2}=0$.

由 $\rho^2\left(1+3\sin^2\theta\right)=4$ 得 $\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta=4$，

代入公式$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$，得 $x^2+y^2+3y^2=4$，$\therefore \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

故曲线C的直角坐标方程是$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.（4 分）

（2）方法一：由 $\theta=\beta$（其中 $\beta\in(0,\pi)$，且 $\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$，$\rho\geq0$），得 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

将射线 $\theta=\beta\left(\rho\geq 0\right)$ 代入曲线 C 的极坐标方程，可得 $\rho_M^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\beta}=\dfrac{4}{1+3\times\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{5}{2}$，$\therefore\rho_M=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+4\sqrt{2}=0$，

将 $\theta=\beta\left(\rho\geq 0\right)$ 代入直线 l 的极坐标方程可得 $\rho\cos\beta-2\rho\sin\beta+4\sqrt{2}=0$，$\therefore\rho_N=\sqrt{10}$，

$\therefore\left|MN\right|=\rho_N-\rho_M=\sqrt{10}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.（10 分）

方法二：由题可得射线 $\theta=\beta$（其中 $\beta\in\left(0,\pi\right)$，且 $\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$，$\rho\geq 0$）的直角坐标方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x\left(x\leq 0\right)$.

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=-\dfrac{1}{2}x\left(x\leq 0\right)\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，则点 $M\left(-\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

联立 $\begin{cases}x-2y+4\sqrt{2}=0\\ y=-\dfrac{1}{2}x\left(x\leq 0\right)\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$，则点 $N\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

$\therefore\left|MN\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.（10 分）

23.解析

（1）$f\left(x\right)=\left|2x+2\right|+\left|x-3\right|=\begin{cases}-3x+1,x\leq -1\\ x+5,-1<x<3\\ 3x-1,x\geq 3\end{cases}$

①当 $x\leq -1$ 时，$-3x+1\leq 5\Rightarrow x\geq -\dfrac{4}{3}$，解得 $-\dfrac{4}{3}\leq x\leq -1$；

②当 $-1<x<3$ 时，$x+5\leq 5\Rightarrow x\leq 0$，解得 $-1<x\leq 0$；

③当 $x\geq 3$ 时，$3x-1\leq 5\Rightarrow x\leq 2$，无解，

$\therefore$不等式的解集为 $\left\{x\middle|-\dfrac{4}{3}\leq x\leq 0\right\}$.（5 分）

（2）$\because\forall x\in\mathrm{R}$，$\left|a^2-3a\right|\leq f\left(x\right)$，$\therefore\left|a^2-3a\right|\leq f\left(x\right)_{\min}$，

由（1）知 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$ 递减，$\left[-1,3\right)$ 递增，$\left[3,+\infty\right)$ 递增，$\therefore f\left(x\right)_{\min}=f\left(-1\right)=4$，

$\therefore\left|a^2-3a\right|\leq 4$，$\therefore -4\leq a^2-3a\leq 4$，解得 $-1\leq a\leq 4$（10 分）