

楚雄州中小学 2022~2023 学年下学期期末教育学业质量监测 高中二年级 数学试卷参考答案

1. D $2 - \frac{i}{1+i} = 2 - \frac{i(1-i)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

2. A 因为 $A = \{x | -1 < x < 6\}$, $B = \{x | x > \frac{3}{2}\}$, 所以 $A \cap B = (\frac{3}{2}, 6)$.

3. B $8 \times 25\% = 2$, 所以该组数据的第 25 百分位数为 $\frac{147+149}{2} = 148$.

4. C 由题可知抛物线 $y^2 = 2px$ 经过点 $(1, 2)$, 则 $4 = 2p$, 即 $p = 2$.

5. B $f(-x) = \frac{-x^3 e^{-x}}{e^{-2x} - 1} = \frac{x^3 e^x}{e^{2x} - 1} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 排除 C, D. 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 排除 A, 故选 B.

6. C 将直线 $(4m-1)x - (m-1)y + 2m+1 = 0$ 转化为 $(4x-y+2)m - x+y+1 = 0$. 令 $\begin{cases} 4x-y+2=0, \\ -x+y+1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \end{cases}$ 故直线经过定点 $N(-1, -2)$. 当直线 MN 与该直线垂直时,

点 M 到该直线的距离取得最大值, 此时 $\frac{4m-1}{m-1} \times \frac{-3-(-2)}{2-(-1)} = -1$, 解得 $m = -2$.

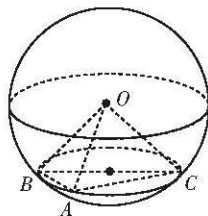
7. B 因为 $P(-2, 2)$, 所以 $\cos(\angle POQ + \frac{\pi}{4}) = -\cos \angle QOx = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. D 如图, 设 $AB = a$, $AC = b$, $BC = 2r$, 点 O 到平面 ABC 的距离为 h , 则 $a^2 +$

$b^2 = 4r^2$, $r^2 + h^2 = 4$, 则 $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} abh \leq \frac{1}{12} (a^2 + b^2) h = \frac{1}{3} r^2 h =$

$\frac{1}{3} (4 - h^2) h$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立. $V_{O-ABC} = \frac{4}{3} h - \frac{h^3}{3}$, $0 < h < 2$, 所以

$V'_{O-ABC} = \frac{4}{3} - h^2$, 当 $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, V_{O-ABC} 取得最大值, 此时 $a = b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



9. ABD 由 $P_n = P_0(1+k)^n$ ($k > -1$), 得当 $-1 < k < 0$ 时, P_n 单调递减, 当 $k = 0$ 时, P_n 不变, 当 $k > 0$ 时, P_n 单调递增. 故选 ABD.

10. AC $f(x) = 2\sin \omega x \cos \omega x - 2\sqrt{3} \sin^2 \omega x + \sqrt{3} = \sin 2\omega x + \sqrt{3} \cos 2\omega x = 2\sin(2\omega x + \frac{\pi}{3})$, 因为

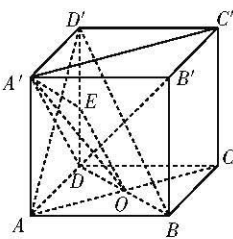
$f(x)$ 的最小正周期为 π , 所以 $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 1$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$, $2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$,

所以直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴. 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, $-\sqrt{3} \leq$

$2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \leq 2$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$. 故选 AC.

11. BCD 正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的面对角线共有 12 条, 其中与 BB' 共面的面对角线有 6 条, 所以与 BB' 异面的面对角线有 6 条, A 不正确.

连接 AD' , 由 $A'D \perp AD'$, $A'D \perp AB$, $AD' \cap AB = A$, 知 $A'D \perp$ 平面 ABD' , 所以 $A'D \perp BD'$, B 正确. 取 DD' 的中点 E , 连接 $A'E$, OE , 则 $A'E = \sqrt{5}$, $OE = \sqrt{3}$, $A'O = \sqrt{6}$, 则 $\cos \angle A'OE = \frac{A'O^2 + OE^2 - A'E^2}{2A'O \cdot OE} =$



$\frac{\sqrt{2}}{3}$, 即异面直线 $A'O$ 与 BD' 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, C 正确. 连接 $A'C'$, $C'D$, P 为正方体内的一个动点, 且 $A'P \perp BD'$, 由 $BD' \perp$ 平面 $A'C'D$ 知, P 在 $\triangle A'C'D$ 内, 当 P 为 BD' 与平面 $A'C'D$ 的交点时, PD' 取得最小值, 由 $V_{D'-A'C'D} = V_{D-A'C'D'}$, 可得 $PD' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, D 正确.

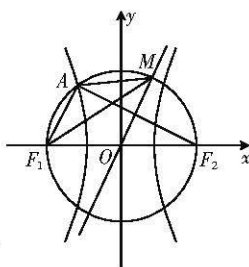
12. CD 令 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x+e)$, $f'(x) = e^x - x - \frac{1}{x+e}$. 令 $g(x) = e^x - x - \frac{1}{x+e}$, 则 $g'(x) = e^x - 1 + \frac{1}{(x+e)^2}$. 显然当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $g(0) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, 所以 $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 从而 $e^a = \frac{1}{2}b^2 + \ln(b+e) > \frac{1}{2}a^2 + \ln(a+e)$. 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(x+e)$, $x > 0$, 易得 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $b > a$. 故选 CD.

13. -4 因为 $a \parallel b$, 所以 $6(m+2) - 3m = 0$, 解得 $m = -4$.

14. -672 $(x - \frac{2}{x^2})^9$ 展开式的通项 $T_{r+1} = C_9^r x^{9-r} (-\frac{2}{x^2})^r = (-2)^r C_9^r x^{9-3r}$, 令 $9-3r=0$, 即 $r=3$, 得 $(x - \frac{2}{x^2})^9$ 展开式中的常数项是 $(-2)^3 C_9^3 = -672$.

15. 1351 因为 $a_1=1, a_2=2, a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} - a_n, & a_n < a_{n+1}, \\ a_n - a_{n+1}, & a_n \geq a_{n+1}, \end{cases}$ 所以 $a_3=1, a_4=1, a_5=0, a_6=1, a_7=1, a_8=0$, 则 $\{a_n\}$ 从第 3 项起为周期数列, 则 $S_{2023} = 674 \times 2 + 3 = 1351$.

16. $\sqrt{5}; \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 如图, 因为 $OM \parallel F_1A$, 所以 $\tan \angle AF_1F_2 = \frac{b}{a}$. 又 $AF_1 \perp AF_2$, $|F_1F_2| = 2c$, 所以 $|AF_1| = 2a$, $|AF_2| = 2b$, 则 $2b = 4a$, 所以 $b = 2a$, 则 $c = \sqrt{5}a$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$. 因为 F_1 到渐近线 OM 的距离为 b , 所以 $S_{\triangle MAF_1} = \frac{1}{2} \times 2a \times b = 2a^2 = 4$, 所以 $a^2 = 2, b^2 = 4a^2 = 8$, 则 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$.



17. 解: (1) 因为 $\sqrt{3}b\sin C = 3c\cos B$, 所以 $\sqrt{3}\sin B\sin C = 3\sin C\cos B$ 2 分

又 $\sin C \neq 0$, 所以 $\sqrt{3}\sin B = 3\cos B$, 即 $\tan B = \sqrt{3}$, 4 分

所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = (a+c)^2 - 3ac$, 7 分

则 $a+c = \sqrt{b^2 + 3ac} = 8$, 9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 12. 10 分

18. (1) 证明: 因为 $PB \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PB \perp AD$ 1 分

又 $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 $AB \perp AD$. 由 $PB \cap AB = B$, 得 $AD \perp$ 平面 PAB 2 分

因为 $BF \subset$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp BF$ 3 分

因为 F 为 PA 的中点, $PB = AB$, 所以 $PA \perp BF$ 4 分

由 $PA \cap AD = A$, 得 $BF \perp$ 平面 PAD 5 分

因为 $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $BF \perp PD$ 6 分

(2) 解: 以 B 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$P(0, 0, 6)$, $F(3, 0, 3)$, $C(0, 6, 0)$, $D(6, 3, 0)$, 7 分

$\overrightarrow{CF} = (3, -6, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (6, -3, 0)$, $\overrightarrow{CP} = (0, -6, 6)$ 8 分

设平面 CDF 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

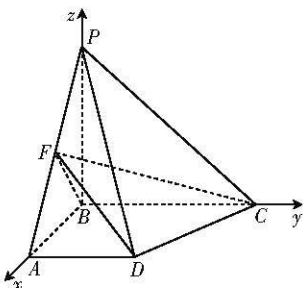
则 $\begin{cases} 3x_1 - 6y_1 + 3z_1 = 0, \\ 6x_1 - 3y_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, 2, 3)$ 9 分

设平面 CDP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} 6x_2 - 3y_2 = 0, \\ -6y_2 + 6z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $x_2 = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$

..... 10 分

$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{11}{3\sqrt{14}} = \frac{11\sqrt{14}}{42}$, 11 分

由图可知, 二面角 $P-CD-F$ 的余弦值为 $\frac{11\sqrt{14}}{42}$ 12 分



19. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_1 + 4d = -11, \\ 3a_1 + 3d = 17a_1 + 136d, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} a_1 = -19, \\ d = 2, \end{cases}$ 4 分

故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 21$ 6 分

(2) 由(1)可知, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2 - 20n = (n-10)^2 - 100$ 8 分

当 $n=10$ 时, S_n 取得最小值 -100 9 分

由 $S_m \leq S_n + 1$ 恒成立, 得 $m^2 - 20m + 99 \leq 0$, 解得 $9 \leq m \leq 11$ 11 分

因为 $m \in \mathbf{N}^*$, 所以 $m=9$ 或 10 或 11 12 分

20. 解: (1) 从 $1, 2, 3, 4, 5$ 这五个数中, 任取三个数组成的三位递增数共有 $C_5^3 = 10$ 个, 2 分

若这个数能被 5 整除, 则个位数为 5 , 共有 $C_4^2 = 6$ 个, 4 分

故所求的概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 5 分

(2) X 的可能取值为 $0, 1, 2$.

所有的三位递增数共有 $C_5^3 = 84$ 个. 6 分

若 $X=0$, 则该三位递增数中不能含有数字 $3, 5, 6, 9$, 满足条件的三位递增数有 $C_3^3 = 10$ 个,

故 $P(X=0) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$ 7 分

若 $X=1$, 则该三位递增数中有数字 5 且没有数字 $3, 6, 9$ 或至少有数字 $3, 6, 9$ 中的 1 个且没有数字 5 , 满足条件的三位递增数有 $C_2^2 + C_3^1 C_2^2 + C_3^2 C_1^1 + C_3^3 = 56$ 个, 故 $P(X=1) = \frac{56}{84} = \frac{2}{3}$.

..... 8 分

若 $X=2$, 则该三位递增数中有数字 5 且至少有数字 $3, 6, 9$ 中的 1 个, 满足条件的三位递增数有 $C_3^1 C_2^2 + C_2^2 = 18$ 个, 故 $P(X=2) = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$ 9 分

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{14}$

..... 10 分

$E(X) = 0 \times \frac{5}{42} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{3}{14} = \frac{23}{21}$ 12 分

21. 解: (1) 由题可知 $a=2, b=1$, 2 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 依题可设直线 A_2Q 的方程为 $y = k(x-2), k < -\frac{1}{2}$.

联立方程组 $\begin{cases} y = k(x-2), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1+4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$,

由 $2x_Q = \frac{16k^2 - 4}{1+4k^2}$, 得 $x_Q = \frac{8k^2 - 2}{1+4k^2}$, 则 $y_Q = \frac{-4k}{1+4k^2}$ 6 分

直线 A_1B 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$, 联立方程组 $\begin{cases} y = k(x-2), \\ y = \frac{1}{2}x + 1, \end{cases}$ 解得 $x_P = \frac{4k+2}{2k-1}, y_P = \frac{4k}{2k-1}, \dots$

..... 7 分

由 B, Q, R 三点共线, 得 $\frac{\frac{-4k}{4k^2+1}-1}{\frac{8k^2-2}{4k^2+1}} = \frac{-1}{x_R}$, 解得 $x_R = \frac{4k-2}{2k+1}$ 8 分

直线 PR 的方程为 $y-0 = \frac{\frac{4k}{2k-1}}{\frac{4k+2}{2k-1} - \frac{4k-2}{2k+1}}(x - \frac{4k-2}{2k+1})$, 9 分

整理得 $x - 4y + 2 + 2k(x-2) = 0$, 当 $x=2$ 时, $y=1$, 11 分

故直线 PR 经过定点, 该定点坐标为 $(2, 1)$ 12 分

22. (1) 解: 因为 $a=1$, 所以 $f(x) = (2x-2)e^x - x^2 + 2, f'(x) = 2x(e^x - 1) \geq 0$ 恒成立, ... 2 分

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 3 分

又 $f(0)=0$, 所以不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(0, +\infty)$ 5 分

(2) 证明: $f(x) = (2x-2)e^x - ax^2 + 2a^2$, 则 $f'(x) = 2x(e^x - a)$.

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=\ln a$ 6 分

因为 $0 < a < 1$, 所以 $\ln a < 0$.

当 $x \in (-\infty, \ln a) \cup (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\ln a, 0)$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\ln a, 0)$.

$f(0) = 2a^2 - 2 < 0, f(\ln a) = -a[(\ln a)^2 - 2\ln a - 2a + 2]$ 7 分

令 $g(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 2x + 2$, 则 $g'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} - 2$, 显然当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 则 $g(a) > g(1)$, 即 $(\ln a)^2 - 2\ln a - 2a + 2 > 0$, 从而 $f(\ln a) < 0$. 故 $f(x)$

在 $(-\infty, 0)$ 上不存在零点. 9 分

当 $x > 1$ 时, 易证得 $e^x > x^2$, 从而 $(2x-2)e^x - ax^2 + 2a^2 > (2x-2)x^2 - ax^2 = x^2(2x-2-a)$,

则 $f(\frac{a}{2} + 1) > 0$, 11 分

故 $f(x)$ 有且只有一个零点 x_0 , 且 $0 < x_0 < \frac{a}{2} + 1$, 则 $ax_0 < \frac{a^2}{2} + a < \frac{3}{2}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线