# 中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 1 月测试

## 文科数学试卷

**本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。**

**一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1． 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$， $B=\{x\in\mathbf{R}||2x-1|\le 1\}$，则 $(C_{\mathbf{R}}B)\cap A=$

A． $\{-1,0\}$　　B． $\{0,1\}$　　C． $\{1,2\}$　　D． $\{-1,2\}$

2． 双曲线 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的渐近线方程是

A． $y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　B． $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

C． $y=\pm\sqrt{2}x$　　D． $y=\pm 2x$

3． 已知复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则复数 $z$ 的虚部为

A． 1　　B． $\dfrac{3}{2}$　　C． $-2$　　D． $-\dfrac{1}{2}$

4． 已知 $a$ 为正数，则“$a>3$”是“$a^a>a^3$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

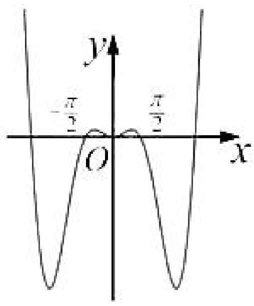
5． 一个函数的图像如图所示，则它的表达式可能为

A． $y=x^2\sin x$

B． $y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$

C． $y=x^2\cos x$

D． $y=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$




（第 5 题图）

6． 已知 $f(x)=\begin{cases}\ln(-x),x<0\\2^{-x},x\ge 0\end{cases}$，则函数 $y=3f^2(x)-2f(x)$ 的零点个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 已知$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$，若向量$\vec{c}$满足$|\vec{c}-2\vec{a}-4\vec{b}|=2\sqrt{3}$，则$|\vec{c}|$的取值范围是

A. $\left[4-2\sqrt{3},4+2\sqrt{3}\right]$　　B. $\left[\sqrt{3},5\sqrt{3}\right]$

C. $\left[2\sqrt{3},6\sqrt{3}\right]$　　D. $\left[5-2\sqrt{3},5+2\sqrt{3}\right]$

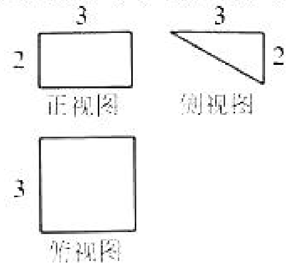
8. 某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则该几何体的外接球的表面积（单位：cm²）为

A. $18\pi$

B. $20\pi$

C. $22\pi$

D. $24\pi$



（第 8 题图）

9. 在$\Delta ABC$中，已知$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=120°$，点$E$在线段$BC$上，且满足$2BE=EC$，则$AE$的长度为

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

10. 把 12 枚相同的硬币分给甲、乙、丙三位同学，每位同学至少分到 1 枚，且他们拿到的硬币数量互不相同，则甲同学恰好拿到两枚硬币的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{9}$

11. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，$BC=1$，若线段$BB_1$上存在一点$E$，使得$DE\perp EC_1$，则$BB_1$的取值范围是

A. $(0,1]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

12. 已知$P(a,b)$是椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$上的任意一点，过原点$O$作圆$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{6}{5}\left(a^2\neq\frac{6}{5}\right)$的两条切线，设这两条切线与椭圆交于$M$，$N$两点，则$OM$，$ON$的斜率之积为

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{5}{6}$

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13．已知函数 $D(x)=\begin{cases}1,x\text{为有理数}\\0,x\text{为无理数}\end{cases}$，则 $D\left[D\left(\sqrt{3}\right)\right]=$________.

14．已知 $a$，$b$ 为正数，满足 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b+2}=1$，则 $ab$ 的最小值为________.

15．如果把个位数是 0，且恰有 3 个数字相同其余数字均不相同的五位数叫做“优数”，那么在由 0，1，2，3，4 五个数字组成的有重复数字的五位数中，“优数”共有________个.

16．已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，满足 $a^x-x^a=0$ 有且仅有唯一的正根，则实数 $a$ 的取值范围是________.

**三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．**

**（一）必考题：共 60 分．**

17．（12 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)-1\right]$，$x\in\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

（1）求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$；

（2）若函数 $g(x)=2f(x)-m^2$ 只有一个零点，求实数 $m$ 的取值集合.

18．（12 分）已知函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{a}{x}$.

（1）若函数 $f(x)$ 有极值，求实数 $a$ 的取值范围；

（2）当 $a=1$ 时，若函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$，$x_2\ (x_1\neq x_2)$ 处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>2$.

19．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_2=3$，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_1=8$，公比 $q>3$，且 $q=a_3$，$b_2=a_1a_3^2$.

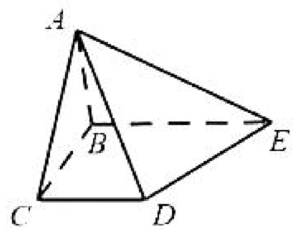
（1）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{a_n^4}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{2}$.

20．（12 分）如图所示，四棱锥 $A-BCDE$ 中，$\Delta ABC$ 为正三角形，$CD\,//\,BE$，$BC=CD=\dfrac{1}{2}BE=1$，$DE=\sqrt{3}$，$AD=\dfrac{3}{2}$.

（1）求四棱锥 $A-BCDE$ 的体积；

（2）求 $BE$ 与面 $ADE$ 所成角的正弦值.

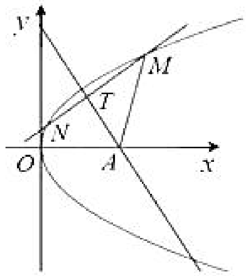


（第 20 题图）

21．（12分）如图所示，已知抛物线$C:y^2=2x$，过点$A(2,0)$的直线$l$与抛物线$C$有两个交点，若抛物线$C$上存在不同的两点$M$，$N$关于直线$l$对称，记$MN$的中点为$T$．

（1）求点$T$的轨迹方程；

（2）求$S_{\Delta AMT}$的最大值．



（第21题图）

**（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．**

22．（10分）[选修4—4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系$xOy$中，直线$l$的参数方程为$\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数）．以$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2=4\sqrt{2}\rho\cdot\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-4$，若直线$l$与曲线$C$交于$A$，$B$两点．

（1）求$|AB|$的值；

（2）若点$P$是曲线$C$上不同于$A$，$B$的动点，求$\Delta PAB$面积的最大值．

23．（10分）[选修4—5：不等式选讲]

设函数$f(x)=|x-a|+3a$．

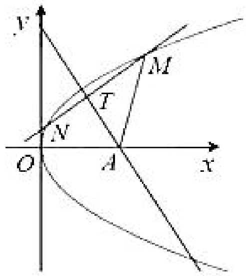
（1）若不等式$f(x)\le 5$的解集为$\{x|-1\le x\le 3\}$，求实数$a$的值；

（2）在（1）的条件下，若不等式$f(x)\ge(k^2-3)x+\dfrac{5}{2}$在$x\in\mathbf{R}$上恒成立，求实数$k$的取值范围．

21．（12 分）如图所示，已知抛物线 $C:y^2=2x$，过点 $A(2,0)$ 的直线 $l$ 与抛物线 $C$ 有两个交点，若抛物线 $C$ 上存在不同的两点 $M$，$N$ 关于直线 $l$ 对称，记 $MN$ 的中点为 $T$．

（1）求点 $T$ 的轨迹方程；

（2）求 $S_{\Delta AMT}$ 的最大值．




（第 21 题图）

**（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．**

22．（10 分）[选修 4—4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t \\ y=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），以 $O$ 为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho^2=4\sqrt{2}\rho\cdot\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-4$，若直线 $l$ 与曲线 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点．

（1）求 $|AB|$ 的值；

（2）若点 $P$ 是曲线 $C$ 上不同于 $A$，$B$ 的动点，求 $\Delta PAB$ 面积的最大值．

23．（10 分）[选修 4—5：不等式选讲]

设函数 $f(x)=|x-a|+3a$．

（1）若不等式 $f(x)\le 5$ 的解集为 $\{x|-1\le x\le 3\}$，求实数 $a$ 的值；

（2）在（1）的条件下，若不等式 $f(x)\ge(k^2-3)x+\dfrac{5}{2}$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，求实数 $k$ 的取值范围．

# 中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 1 月测试

## 文科数学 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | B | D | A | C | C | C | C | B | B | D | B |

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．1　　14．$8+4\sqrt{3}$　　15．84　　16．$(0,1)\cup\{e\}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

（1）$\because \sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\therefore f(x)=\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1\right]$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 2x\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$ ……………………3 分

$=-\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ ……………………6 分

则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$ ……………………7 分

（2）因为 $x\in\left[0,\frac{7\pi}{12}\right)$，令 $t=2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right)$，$g(x)=0\Rightarrow f(x)=\frac{m^2}{2}$

$\frac{3}{2}\sin t=\frac{m^2}{2}\Rightarrow \sin t=\frac{m^2}{3}$ 在 $t\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right)$ 上只有一个解……………………9 分

$\therefore$ 结合图像可得 $\frac{m^2}{3}=0$ 或 $1\Rightarrow m=0,\pm\sqrt{3}$

故 $m\in\left\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right\}$……………………12 分

18.（12 分）

（1）$f(x)=2\ln x+\frac{a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{2x-a}{x^2}$……………………2 分

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，此时 $f(x)$ 无极值，

$\therefore a\le 0$ 不符合题意……………………4 分

当 $a>0$ 时，当 $x\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x=\frac{a}{2}$ 时，函数取得极小值，$\therefore a>0$……………………6 分

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}$，$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$，$f'(x_1)=f'(x_2)$

$\therefore \frac{2}{x_1}-\frac{1}{x_1^2}=\frac{2}{x_2}-\frac{1}{x_2^2}$，即 $\frac{2(x_2-x_1)}{x_1x_2}-\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=0$，

$\because x_1\ne x_2$，化简可得 $2x_1x_2-(x_1+x_2)=0$……………………8 分

$f(x_1)+f(x_2)=2\ln x_1+\frac{1}{x_1}+2\ln x_2+\frac{1}{x_2}$

$=2\ln(x_1x_2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2\ln(x_1x_2)+2$……………………10 分

$\because x_1+x_2=2x_1x_2$

由 $x_1\cdot x_2>0$ 且 $x_1\ne x_2$ 可得 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}$

$\therefore 2x_1x_2>2\sqrt{x_1x_2}$ 即：$x_1x_2>1$

$\therefore f(x_1)+f(x_2)>2$……………………12 分

19.（12 分）

（1）由题意，数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=3$，数列$\{b_n\}$是等比数列，$b_1=8$，公比$q>3$，

设$\{a_n\}$的公差为$d$，由$\begin{cases}q=3+d\\8q=(3-d)\cdot(3+d)^2\end{cases}$可得$8(3+d)=(3-d)(3+d)^2$，

$\therefore d=-3$或$d=\pm1$ ……………………………………………………………………2 分

$\because q=3+d>3$，$\therefore d=1$，$\therefore q=4$ ……………………………………………………3 分

可得：$a_n=a_2+(n-2)d=3+(n-2)\times1=n+1$ ……………………………………4 分

$b_n=b_1q^{n-1}=8\times4^{n-1}=2^{2n+1}$ ……………………………………………………5 分

（2）$c_n=\dfrac{\log_2 2^{2n+1}}{(n+1)^4}=\dfrac{2n+1}{(n+1)^4}<\dfrac{2n+2}{(n+1)^4}=\dfrac{2}{(n+1)^3}$ ……………………………………7 分

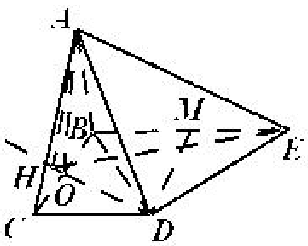
$\because (n+1)^3>n(n+1)(n+2)$

$\therefore c_n<\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ ……………………………………10 分

$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{1\times2}-\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{2\times3}-\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{1}{2}$

……………………12 分

20.（12 分）




（1）$\because BC=CD=\dfrac{1}{2}BE=1$，取$BE$的中点$M$，连接$MD$，

可得$ME=MD=1$，$ED=\sqrt{3}$，$\therefore \angle BED=30^\circ$，

由平行四边形$BMDC$，可得$\angle BCD=\angle BMD=60^\circ$，

连接$BD$，可得$\Delta BCD$为正三角形，取$BC$中点$O$，连接$OA$、$OD$

$\because \Delta ABC$、$\Delta BCD$均为正三角形，

$\therefore AO\perp BC$且$OD\perp BC$，$\because AO\cap OD=O$ $\therefore BC\perp$面$AOD$ …………………2 分

又$\because BC\subset$面$BCDE$，$\therefore$面$AOD\perp$面$BCDE$

$\because AO=OD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$AD=\dfrac{3}{2}$，可得$\angle AOD=120^\circ$，

延长$DO$，作$AH\perp OD$于$H$，

$\because$面$AOD\perp$面$BCDE$，且面$AOD\cap$面$BCDE=OD$

$\therefore AH\perp$面$BCDE$ ……………………………………………………………………4 分

$S_{BCDE}=(1+2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 60^\circ=\frac{3}{4}$ ……………………………5 分

$\therefore V_{A-BCDE}=\frac{1}{3}S_{BCDE}\cdot AH=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ……………………………6 分

（2）先求 $S_{\triangle ADE}$，连接 $EH$，在 $\Delta EDH$ 中，

$OH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\therefore DH=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\angle EDH=120^\circ$，$DE=\sqrt{3}$，由余弦定理 $-\frac{1}{2}=\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\sqrt{3}^2-EH^2}{2\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}}$，

$\therefore EH^2=\frac{111}{16}$，$\therefore AE=\sqrt{AH^2+EH^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{111}{16}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$ ……………………………8 分

$\therefore \cos\angle ADE=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\sqrt{3}^2-\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2}{2\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\sin\angle ADE=\sqrt{1-\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$，

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{3\sqrt{39}}{16}$ ……………………………10 分

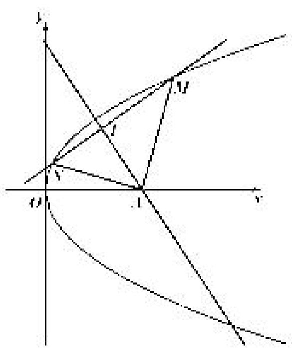
$V_{B-ADE}=V_{A-BDE}$，设 $B$ 到面 $ADE$ 的距离为 $h$，$S_{\triangle ADE}\cdot h=S_{\triangle BDE}\cdot AH$，

$S_{\triangle BDE}=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \frac{3\sqrt{39}}{16}\times h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}$，$\therefore h=\frac{2}{\sqrt{13}}$

设 $BE$ 与面 $ADE$ 所成角为 $\theta$，

则 $\sin\theta=\frac{h}{BE}=\frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$ ……………………………12 分

21.（12 分）




（1）由题意得直线 $l$ 的斜率存在且不为 0，设直线 $l: y=k(x-2)$，

$T(x,y)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y_1^2=2x_1\\ y_2^2=2x_2\end{cases}$ 得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2(x_1-x_2)$，

则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2}{y_1+y_2}$ ……………………………2 分

又 $y_1+y_2=2y$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{k}$

代入可得：$-\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{2y}$，$\therefore y=-k$ 代入直线方程得 $x=1$ ……………………………3 分

又当 $x=1$ 时，由 $y^2=2x$ 得 $y=\pm\sqrt{2}$，$\because T$ 在抛物线开口方向内，

$\therefore -\sqrt{2}<y<\sqrt{2}$

$\therefore$ 点 $T$ 的轨迹方程为 $x=1\left(-\sqrt{2}<y<\sqrt{2}\right)$ ……………………………………………4 分

（2）由（1）可知直线 $MN$：$y=-\dfrac{1}{k}x-k+\dfrac{1}{k}$，由 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{k}x-k+\dfrac{1}{k} \\ y^2=2x \end{cases}$

得：$y^2-2ky+2k^2-2=0$，

$\because$ 直线 $MN$ 与抛物线交于 $M$、$N$ 两点，$\therefore \Delta=-4k^2+8>0$ 即 $0<k^2<2$ ………6 分

则 $y_1+y_2=-2k$，$y_1y_2=2k^2-2$

$\therefore |y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4k^2-4(2k^2-2)}=\sqrt{8-4k^2}$，

$\therefore |MN|=\sqrt{(1+k^2)(8-4k^2)}$ ……………………………………………………………8 分

又 $|AT|=\sqrt{1+k^2}\,|2-1|=\sqrt{1+k^2}$，

$\therefore S_{\triangle AMT}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{4}|MN||AT|=\dfrac{1}{4}\sqrt{(1+k^2)^2(8-4k^2)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{-k^6+3k^2+2}$ …10 分

令 $t=k^2$，$y=-t^3+3t+2\left(t\in(0,2)\right)$

$\therefore y'=-3t^2+3$，由 $-3t^2+3=0$ 得 $t=1$（负根舍去），

知当 $t\in(0,1)$ 时，$y$ 随 $t$ 增大而增大，当 $t\in(1,2)$ 时，$y$ 随 $t$ 增大而减小，

$\therefore$ 当 $t=1$ 时，$y$ 取得最大值 4，$\therefore k=\pm1$ 时，$(S_{\triangle AMT})_{\max}=1$ ……………………12 分

**（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一道题作答，如果多做，则按所做的第一题计分**

22.（10 分）

（1）$\rho^2=4\sqrt{2}\rho\cdot\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-4$ 可化为：$\rho^2=4\rho\sin\theta+4\rho\cos\theta-4$，

将 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入，得曲线 $C$ 的直角坐标方程为：$x^2-4x+y^2-4y+4=0$ …..2 分

将直线$l$的参数方程为$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$，代入化简可得：$t^2-t-3=0$，

设点$A$，$B$所对应的参数方程分别为$t_1$，$t_2$，满足$\Delta>0$，由$\begin{cases} t_1+t_2=1, \\ t_1\cdot t_2=-3, \end{cases}$ ……………4分

由直线参数的几何意义得，

$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{1+4\times3}=\sqrt{13}$ ……………………………………5分

（2）将直线$l$的参数方程化为普通方程得：$\sqrt{3}x-y+2-\sqrt{3}=0$ ……………………………6分

设$P(2+2\cos\theta,2+2\sin\theta)$，得点$P$到直线$AB$的距离为：

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}(2+2\cos\theta)-(2+2\sin\theta)+2-\sqrt{3}\right|}{2}=\frac{\left|\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta\right|}{2},$$

则：$d=\dfrac{\left|\sqrt{3}+4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right|}{2}\le\dfrac{\sqrt{3}+4}{2}$ ……………………………………………………8分

由（1）知$|AB|=\sqrt{13}$，当$d$取最大值时，$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}+4}{2}\times\sqrt{13}=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{39}}{4}$，

则$\Delta PAB$面积的最大值为$\sqrt{13}+\frac{\sqrt{39}}{4}$ ……………………………………………10分

23.（10分）

（1）$\because |x-a|+3a\le5$，$\therefore |x-a|\le5-3a$，$\therefore 3a-5\le x-a\le5-3a$，

$\therefore 4a-5\le x\le5-2a$ ……………………………………………………………2分

由$f(x)\le5$的解集为$\{x|-1\le x\le3\}$，$\begin{cases} 4a-5=-1 \\ 5-2a=3 \end{cases}$，

解得$a=1$ ……………………………………………………………………4分

（2）由（1）得$f(x)=|x-1|+3=\begin{cases} x+2,x\ge1 \\ 4-x,x<1 \end{cases}$，定点为$A(1,3)$ ……………………5分

由于$y=(k^2-3)x+\frac{5}{2}$恒过$B\left(0,\frac{5}{2}\right)$，计算可得：$k_{AB}=\dfrac{3-\frac{5}{2}}{1}=\frac{1}{2}$ ……………6分

要使不等式$f(x)\ge(k^2-3)x+\frac{5}{2}$在$x\in\mathbf{R}$上恒成立，需$-1\le k^2-3\le\frac{1}{2}$ ………8分

$\therefore k$的取值范围是$\left\{k\,|-\frac{\sqrt{14}}{2}\le k\le-\sqrt{2}\text{或}\sqrt{2}\le k\le\frac{\sqrt{14}}{2}\right\}$ ……………10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。