蚌埠市2023届高三年级第四次教学质量检查考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题:

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	B	D	A	C	D	B	A	C

二、选择题:

题　号	9	10	11	12
答　案	BC	ABCD	BCD	AC

三、填空题:

13. $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$　　14. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　15. 1　　16. $\frac{4}{3}\pi$(2 分),$\frac{5}{8}$(3 分)

四、解答题:

17. (10 分)

(1)$\because 2\sin^2A-2\sin^2B+2\sin B\sin C=1-\cos 2C=2\sin^2C$,

$\therefore \sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$,

由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$, ………………………………………… 2 分

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,

又 $A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 5 分

(2)$\because S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$,$\therefore \frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$,$\therefore bc=24$. ………………………… 7 分

由题意知 $\angle BAD=\angle DAC=\frac{\pi}{6}$,

$\because S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$,

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\frac{\pi}{3}$,

$\therefore b+c=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=6\sqrt{3}$, ………………………………………… 9 分

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-3bc=36$,故 $a=6$.

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6+6\sqrt{3}$. ………………………………………… 10 分

18. (12 分)

(1)由 $a_1=2$,$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{a_n}=1$,$a_{n+1}=2b_n$ 得 $\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$,

整理得 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$,而 $\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}\neq 0$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, ………………… 2 分

所以 $\frac{1}{a_n}-1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^n}$,

$\therefore a_n=\frac{2^n}{2^n-1}$, ………………………………………… 5 分

$\therefore b_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{2^n}{2^{n+1}-1}$. …………………………………………………………… 6 分

(2) $\frac{n}{b_n}=n\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=2n-\frac{n}{2^n}$, …………………………………………………………… 7 分

设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$, ①

则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$, ②

① - ②得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$,从而

$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. …………………………………………………………… 11 分

$\therefore T_n=\frac{n(2+2n)}{2}-S_n=n^2+n-2+\frac{n+2}{2^n}$. ………………………………………… 12 分

19. (12 分)

(1) 记“所选取的 2 名学生选考物理、化学、生物科目数量相等”为事件 A,

则 $P(A)=\frac{C_{10}^2+C_{40}^2+C_{50}^2}{C_{100}^2}=\frac{41}{99}$. …………………………………………………… 2 分

(2) 由题意可知 X 的可能取值分别为 0,1,2,则

$P(X=0)=\frac{C_{10}^2+C_{40}^2+C_{50}^2}{C_{100}^2}=\frac{41}{99}$, $P(X=1)=\frac{C_{10}^1C_{40}^1+C_{40}^1C_{50}^1}{C_{100}^2}=\frac{16}{33}$, $P(X=2)=\frac{C_{10}^1C_{50}^1}{C_{100}^2}=\frac{10}{99}$,

从而 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{41}{99}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{10}{99}$

故 X 的期望为 $E(X)=0\times\frac{41}{99}+1\times\frac{16}{33}+2\times\frac{10}{99}=\frac{68}{99}$. ……………………………… 7 分

(3) 所调查的 100 名学生中物理、化学、生物选考两科目的学生有 40 名,

相应的频率为 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, …………………………………………………………… 9 分

由题意知 $Y\sim B(4,\frac{2}{5})$,所以事件“$Y\geqslant 2$”的概率为

$$P(Y\geqslant 2)=C_4^2(\frac{2}{5})^2\times(1-\frac{2}{5})^2+C_4^3(\frac{2}{5})^3\times(1-\frac{2}{5})+C_4^4(\frac{2}{5})^4=\frac{328}{625}.$$

…………………………………………………………………………… 12 分

20. (12 分)

(1) 证明:$\because$ 侧面 $ADFC$ 是正方形,底面 ABC 是等腰直角三角形,$\therefore CA\perp AB$, $CA\perp AD$.

又$\because AB\cap AD=A$, $\therefore CA\perp$ 平面 $ABED$,而 $ME\subset$ 平面 $ABED$, $\therefore CA\perp ME$. ………… 2 分

由题意四边形 $ABED$ 为菱形,且 $\angle ABE=60°$, $\therefore \triangle AED$ 是等边三角形,

$\because M$ 为 AD 中点, $\therefore ME\perp AD$,

又 $CA\cap AD=A$, $\therefore ME\perp$ 平面 $ADFC$,

而 $ME\subset$ 平面 CME,

$\therefore$ 平面 $CEM\perp$ 平面 $ADFC$. …………………………………………………………… 5 分

(2) 假设存在点 P 满足题意,则由(1)知 $CA\perp$ 平面 $ABED$, $\angle BAD=120°$,

取 BE 中点 N,以 AN, AD, AC 方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0)$, $B(\sqrt{3},-1,0)$, $E(\sqrt{3},1,0)$, $M(0,1,0)$, $C(0,0,2)$, ……………… 6 分

从而$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},1,-2)$，$\overrightarrow{ME}=(\sqrt{3},0,0)$.

设$\overrightarrow{CP}=\lambda\,\overrightarrow{CE}(\lambda\in[0,1])$，则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda,2-2\lambda)$，

设平面ABP的法向量为$m=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot m=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot m=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ \sqrt{3}\lambda x+\lambda y+(2-2\lambda)z=0,\end{cases}$

取$m=(\lambda-1,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},\sqrt{3}\lambda)$. …………………………………………………… 8 分

设平面CME的法向量为$n=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{ME}\cdot n=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}a+b-2c=0,\\ \sqrt{3}a=0,\end{cases}$

取$c=1$得$n=(0,2,1)$. ………………………………………………………………… 10 分

$\therefore\cos\theta=\dfrac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\dfrac{|2\sqrt{3}(\lambda-1)+\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3\lambda^2+4(\lambda-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{285}}{95}$，

化简得，$27\lambda^2-39\lambda+10=0$，解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{10}{9}$(舍).

故存在$CP=\dfrac{1}{3}CE=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$满足题意. ……………………………………………… 12 分

21. (12 分)

(1)解：由题意得：$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\\ 2b=2\sqrt{2},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2.\end{cases}$

故椭圆C的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. …………………………………………………… 5 分

(2)证明：直线l的方程为$y=kx+m$，代入$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$. 设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\dfrac{-4km}{2k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$，…………………………………………… 7 分

所以$S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|m|\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}|m|\sqrt{\left(\dfrac{-4km}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}}=\sqrt{2}$，

即$m^4-(4k^2+2)m^2+(2k^2+1)^2=0$，得$m^2=2k^2+1$.

所以$k_{OM}\cdot k_{ON}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}$

$=\dfrac{k^2(2m^2-4)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)}{2m^2-4}=\dfrac{1-2k^2}{4k^2-2}=-\dfrac{1}{2}$，…… 10 分

设$T(x_0,y_0)$，得$k_{AT}\cdot k_{BT}=\dfrac{y_0-\sqrt{2}}{x_0}\cdot\dfrac{y_0+\sqrt{2}}{x_0}=\dfrac{y_0^2-2}{x_0^2}=-\dfrac{1}{2}$，

因为$AT/\!/OM$，$k_{AT}=k_{OM}$，所以$k_{BT}=k_{ON}$，即$BT/\!/ON$. ……………………………… 12 分

22. (12 分)

(1)证明：令$g(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$，易知

$g'(x)=-\sin x+x$，$g''(x)=-\cos x+1\geqslant 0$，故$g'(x)$在R上单调递增，

又$g'(0)=0$，故$g'(x)>0$在$(0,+\infty)$恒成立，即$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$g'(x)<0$在$(-\infty,0)$恒成立，即$g(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，

因为$g(0)=0$，故$g(x)\geqslant 0$在R上恒成立，即$f(x)\leqslant\dfrac{x^2}{2}$. ……………………………… 4 分

(2)由 $h(x)=a\ln(x+1)-1+\cos x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$h'(x)=\frac{a}{x+1}-\sin x, h''(x)=-\frac{a}{(x+1)^2}-\cos x<0$,

所以 $h'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,又 $h'(0)=a>0, h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a}{\frac{\pi}{2}+1}-1<\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}-1<0$,

由零点存在性定理知,存在唯一实数 $m\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $h'(m)=0$,

故当 $x\in(0,m)$, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增;

$x\in\left(m,\frac{\pi}{2}\right)$, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减. 又 $h(0)=0$,故 $h(m)>0$,

且 $h(x)>0$ 在 $(0,m)$ 恒成立,又 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-1<\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-1<0$,

故存在唯一 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $h(x_0)=0$. ………………………………………… 8 分

下面证明 $x_0>\sqrt{4a+1}-1$,只需证 $h(\sqrt{4a+1}-1)>0$,

即证 $a\ln\sqrt{4a+1}>f(\sqrt{4a+1}-1)$.

由(1)知:$f(\sqrt{4a+1}-1)\leqslant\frac{(\sqrt{4a+1}-1)^2}{2}$,

只需证:$a\ln\sqrt{4a+1}>\frac{(\sqrt{4a+1}-1)^2}{2}$,

令 $t=\sqrt{4a+1}-1$, $\because 0<a<1$, $\therefore t\in(0,\sqrt{5}-1)$,而 $a=\frac{(t+1)^2-1}{4}=\frac{t^2+2t}{4}$,

故只需证 $\frac{t^2+2t}{4}\ln(t+1)>\frac{t^2}{2}\Leftrightarrow\ln(t+1)>\frac{2t}{t+2}$,其中 $t\in(0,\sqrt{5}-1)$,

令 $F(t)=\ln(t+1)-\frac{2t}{t+2}, t\in(0,\sqrt{5}-1)$,

则 $F'(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{4}{(t+2)^2}=\frac{t^2}{(t+1)(t+2)^2}>0$,

所以 $F(t)$ 在 $(0,\sqrt{5}-1)$ 上单调递增,

所以 $F(t)>F(0)=0$,即 $t\in(0,\sqrt{5}-1)$ 时, $\ln(t+1)>\frac{2t}{t+2}$,

所以 $x_0>\sqrt{4a+1}-1$. ………………………………………………………… 12 分

(以上答案仅供参考,其他解法请参考以上评分标准酌情赋分)